ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 7 JANVIER 1929.

PRÉSIDENCE DE M. Louis MANGIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

LITHOLOGIE. — *Sur l'existence de tectites au Cambodge; leur morphologie.* Note de M. A. Lacroix.

Il y a quelques mois, M. H. Lecomte m'a remis pour détermination quelques minéraux recueillis par M. Poilane, son collecteur de plantes en Indochine. Parmi ces échantillons, se trouvait une boule d'un verre noir, à surface corrodée, qui m'a rappelé la billitonite de l'île Billiton, en Malaisie. Par l'intermédiaire de notre confrère, j'ai reçu de M. Poilane de nombreux autres échantillons et des renseignements sommaires sur leur gisement. Je puis ainsi aborder, avec des documents nouveaux, le problème des tectites, l'un des plus obscurs, sinon le plus obscur, de la lithologie.

Bien qu'il ait été publié sur les tectites beaucoup de travaux (¹), aucun n'ayant paru en langue française, il me semble utile de faire précéder l'étude de ces documents nouveaux par quelques mots d'historique.

Le nom de *tectite* a été proposé, en 1900, par M. Franz E. Suess comme terme générique pour désigner des verres très siliceux et alumineux trouvés dans trois régions du monde fort éloignées les unes des autres : le sud de la

(¹) Des bibliographies étendues se trouvent en particulier dans les Mémoires suivants : Franz E. Suess, *Die Herkunft der Moldavite und verwandter Gläser* (*Jahrb. K. K. Geol. Reischsanst. Wien*, 50, 1900, p. 193-382, et *Mitt. Geol. Gesellsch. Wien*, 7, 1914, p. 5); H. S. Summers, *Proceed. R. Soc. Victoria*, 21, 1900, p. 423; E.-J. Dunn, *Bull. Geol. Surv. Victoria*, n° 27, 1912, p. 15; Wing Easton, *Verhandl. Konink. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 22, 1921, n° 21; H. Michel, *Ann. Naturhist Mus. Wien*, 38, 1925, p. 153.

Bohême et la Moravie; l'ouest et le sud de l'Australie, la Tasmanie; enfin la région malaise ([1]). A défaut d'interprétation définitive, ils avaient reçu, suivant leur provenance, des noms divers : *moldavite* (Bouteillenstein, Pseudochrysolit), *australite*, *billitonite*, *obsidianite*. Un type aberrant provenant du Mont Darvin, en Tasmanie, a été appelé *queenstownite* par M. F. Suess ([2]).

Dans chacune de ces régions, les tectites sont distribuées sur de vastes espaces, mais toujours dans les mêmes conditions géologiques, non pas à la surface du sol, mais à l'intérieur de dépôts détritiques (alluvions stannifères, aurifères, etc.), quaternaires, tertiaires, ou même plus anciens.

Les tectites, noires ou plus rarement verdâtres, possèdent la cassure vitreuse des obsidiennes, mais, à l'inverse de la plupart de celles-ci, elles présentent la caractéristique commune de ne renfermer aucun minéral cristallisé, même à l'état cristallitique. Elles sont formées uniquement par une matière isotrope, incolore et transparente, en lames minces, quelquefois bulleuse. Les tectites ne se rencontrent qu'à l'état de fragments, très clairsemés, quelquefois concentrés en essaims. Le plus gros de ceux qui ont été décrits est un échantillon de la collection du Muséum de Singapore étudié par Scrivenor et provenant de Malaisie, il pèse 464^g; en Moldavie et en Australie, les plus gros échantillons connus en pèsent 120. La moyenne paraît être comprise entre 10 et 90^g.

Ces fragments possèdent des formes variées suivant les régions, mais assez constantes dans chacune d'entre elles : disques, tessons aplatis, etc. (Bohême); sphères, cylindres, ellipsoïdes, poires, larmes, etc. (Malaisie); forme très régulière de boutons, avec ou sans rebord, ou bien rappelant l'aspect des fruits d'arachide (Australie), etc. Dans quelques gisements (Australie), etc., ces fragments renferment une ou plusieurs bulles gazeuses plus ou moins volumineuses.

Les tectites sont quelquefois presque dépourvues d'accidents superficiels (australites), mais, plus souvent, leur surface est curieusement sculptée d'entailles profondes, parfois disposées en rosettes (moldavites), ou creusée de

---

([1]) Depuis lors, d'autres gisements ont été signalés en Amérique (Arizona, Colombie, Pérou) et les produits de certains d'entre eux, désignés sous le nom d'*américanite*. Leur identité avec les tectites ayant, pour certains d'entre eux au moins, été contestée, je ne m'en occuperai pas dans cette Note préliminaire.

([2]) Un autre nom, celui de *schonite*, d'une localité suédoise, doit être abandonné, son auteur, M. F. Suess, m'ayant fait savoir que la substance à laquelle il avait été attribué est un produit d'industrie.

sillons, de gouttières, de cupules, avec ou sans nombril, etc. (billitonites); ces particularités ont été minutieusement décrites et elles sont d'importance pour la discussion de l'origine de ces corps si curieux.

Cette origine est le point le plus discuté de l'histoire des tectites.

En effet, elles ont été regardées, tout d'abord, comme un produit de l'industrie humaine.

On les a considérées ensuite comme de nature volcanique, mais comme, dans le voisinage de leurs gisements, il n'existe généralement pas de volcans susceptibles de fournir des matériaux d'une telle composition, une hypothèse supplémentaire a été faite (E.-J. Dunn), celle du transport aérien à des distances vraiment extraordinaires de ces fragments (australites), allégés par des bulles gazeuses.

Les tectites ont été aussi comparées à des fulgurites qui auraient été produites par la foudre aux dépens de nuages de poussière ou bien de sable gisant à la surface du sol.

M. Wing Easton a proposé une tout autre théorie; d'après lui, les tectites seraient des gels déshydratés, formés sur place, par l'action de l'humus sur les roches voisines.

Enfin, l'on a pensé à une origine extra-terrestre; produits des volcans de la lune (Veebeek), ou météorites (Krause, Franz E. Suess, Summers, R.-W. Van der Veen) et c'est cette dernière hypothèse qui est le plus en faveur actuellement.

En présence de points de vue aussi contradictoires, je réserve la discussion de la question d'origine des tectites indochinoises pour le moment où je serai en possession des compléments d'information géologique que je cherche actuellement à réunir. Dans la présente Note, je me propose de traiter uniquement des conditions de gisement et de la morphologie des documents que j'ai en mains.

Le gisement de ceux-ci se trouve dans la partie septentrionale du Cambodge, au nord-est d'Angkor, non loin de la frontière du Siam, au pied du massif de Dangrek. A 8 ou 10^{km} du village de Smach, au milieu d'une grande plaine déboisée, couvertes de Graminées incendiées chaque année, des ravinements de 2 à 4^{m} de profondeur sont dus à l'érosion d'un petit cours d'eau, à sec pendant la saison sèche. Le sol est formé par une argile jaunâtre, très sableuse, riche en pisolites ferrugineux, communément appelés en Indochine *bienhoa*; les échantillons étudiés s'y trouvent à

partir de $0^m,50$ de la surface; ils supportent parfois des concrétions ferrugineuses qui ne semblent pas s'être formées à leurs dépens.

Quelle que soit leur origine, leur mise en place a donc été antérieure à la latéritisation, à laquelle ils ont résisté. Le seul renseignement que je possède sur leurs associations est qu'ils sont accompagnés de gros cristaux de zircon, recueillis, comme eux, par les Malais pour la bijouterie.

La géologie de cette région a été peu étudiée; sur la récente carte géologique de l'Indochine publiée par M. F. Blondel, seuls sont notés des grès triasiques (?), aux dépens desquels se serait par suite formé le sol précité. Plus au Sud, sont connues des coulées basaltiques que j'ai traversées, en 1927, sans rencontrer aucune roche volcanique acide.

Il semble que les produits dont il s'agit ici aient une vaste répartition dans cette région.

Ce qui vient d'être indiqué sur le mode de distribution des échantillons étudiés, leur forme, leur structure, leur composition chimique ne laissent pas de doute sur leur identification avec les tectites et c'est ce que je vais démontrer, en commençant aujourd'hui par l'examen de leurs caractères morphologiques.

J'ai examiné 1750 échantillons; le plus gros, qui paraît très exceptionnel, pèse 630^g; il en est ne pesant que quelques grammes, mais la moyenne est comprise entre 2 et 40^g. Il faut remarquer toutefois que ces nombres n'ont, peut-être, qu'une valeur provisoire, ces échantillons ayant été recueillis, sans préoccupation statistique, par des personnes ne se doutant pas de l'intérêt de la question.

La cassure est généralement celle d'un verre homogène et continu, rappelant les plus belles obsidiennes noires; cependant, plusieurs des plus gros échantillons présentent un nombre considérable de très petites bulles gazeuses, parfaitement sphériques; aucun d'eux ne possède la texture ponceuse, à bulles étirées, si caractéristique des verres acides volcaniques.

Les formes des pièces dont je mets des photographies sous les yeux de l'Académie, en comparaison avec celles d'autres tectites, sont très variées; elles peuvent être groupées dans les divisions suivantes qui ne laissent place à aucune interprétation de taille intentionnelle : 1° boules, plus ou moins sphériques, généralement un peu aplaties, ou 2° très aplaties en forme de palets circulaires; 3° larmes et coins très aigus; 4° lames allongées et plus ou moins aplaties; 5° faucilles; 6° plaques irrégulières, à surface plus ou moins plane; 7° plaques gaufrées, ressemblant parfois à des débris de

coquilles ; 8° fragments irréguliers plus où moins parallélépipédiques : c'est le type de tous les gros fragments.

A l'exception des tectites appartenant à ce dernier type dont la surface est légèrement et irrégulièrement corrodée, toutes présentent des ornements en creux, de formes très diverses, à répartir en deux groupes.

1° *Cupules*. — Ce sont des sections de calottes sphériques, isolées les unes des autres et alors régulières, ou bien coalescentes; quelquefois elles sont séparées les unes des autres par des surfaces planes ou courbes, creusées d'ornements du même genre, mais plus petits; dans certains cas, elles sont si rapprochées les unes des autres qu'elles ne sont séparées que par de fines arêtes tranchantes. La première idée qui vient à l'esprit est de considérer ces cupules comme des sections de bulles gazeuses, mais une telle opinion est rendue improbable par ce fait que la rupture de ces pièces fournit une cassure homogène, dépourvue de bulles; de plus, certaines de ces pièces, et notamment les lames, sont certainement des débris de fragments de plus grandes dimensions. Elles sont partiellement limitées par des cassures, sur quoi se voient des cupules de même forme, mais très petites, de telle sorte que l'on ne peut guère échapper à l'hypothèse d'une corrosion à divers degrés, qui aurait produit tous ces ornements en creux.

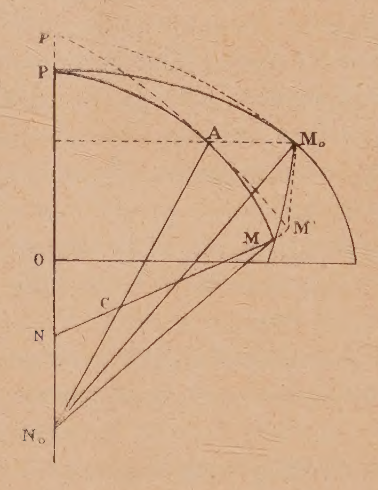
2° *Cannelures*. — Le second genre d'ornements consiste en cannelures, plus ou moins profondes, qui traversent les cupules et sont en relation avec la forme des contours extérieurs de la pièce, étirées dans le sens de l'allongement quand celles-ci sont allongées ou bien plus ou moins parallèles à sa surface, lorsqu'elles sont aplaties. Il est facile de les imiter par l'action de l'acide fluorhydrique, il s'agit donc là aussi d'une corrosion qui met en évidence des étirements subis par la matière isotrope, alors qu'elle était plastique. Les constantes physiques de cette matière montrent d'ailleurs une certaine hétérogénéité. Parfois, au lieu d'être rectilignes, ces cannelures sont curieusement plissées en anticlinaux et en synclinaux très aigus, décelant, d'une façon des plus nettes, les mouvements subis par la matière plastique.

La surface de ces échantillons est parfois terne, mais, plus souvent, elle possède un éclat rappelant celui de la laque, mais qui rarement est aussi vif que celui des billitonites de Billiton.

GÉODÉSIE. — *Sur l'extension de la méthode des ingénieurs géographes aux termes du quatrième ordre.* Note [1] de M. E. FICHOT.

1. Dans un Mémoire antérieurement publié [2], j'ai sommairement indiqué qu'on pouvait, par un développement logique de la méthode des ingénieurs géographes, obtenir les différences de coordonnées géographiques avec le quatrième ordre inclus, tout comme par la méthode d'Andrae. Je me propose ici de montrer comment on peut conduire simplement les calculs et de présenter les résultats sous forme de séries *ne contenant que des données à l'origine*.

2. M_0M étant, sur l'ellipsoïde de référence, l'arc de *géodésique* de lon-



gueur σ et d'azimut Z (compté ici à partir du Nord suivant les usages hydrographiques), le plan de section normale directe M_0N_0M interceptera sur la sphère de rayon $M_0N_0 = \rho'_0$ un arc de grand cercle dont la portion M_0M', comprise entre les deux méridiens extrêmes de la géodésique, possédera une longueur s et un azimut ζ tels que

$$s = \sigma + \frac{1}{6}e^2\cos^2 L_0 \cos^2 Z \rho'_0 \left(\frac{\sigma}{\rho'_0}\right)^3, \qquad \zeta = Z + \frac{1}{6}e^2\cos^2 L_0 \sin Z \cos Z \left(\frac{\sigma}{\rho'_0}\right)^2.$$

---

[1] Séance du 2 janvier 1929.

[2] *Sur la réduction au sphéroïde terrestre des données de la triangulation* (*Annales hydrographiques*, 1907, p. 47-136).

Comme dans toutes les applications du théorème de Legendre, e^2 et $\frac{\sigma}{\rho_0}$ sont considérés comme du premier ordre de grandeur.

Sur la sphère de rayon ρ'_0, le triangle sphérique pM_0M' nous fournit aisément le développement en série suivant les puissances croissantes de $\frac{s}{\rho_0}$, avec des coefficients fonctions de L_0 et z, qui donne l'expression de la différence ξ des latitudes sphériques de M' et de M_0; et si nous remplaçons dans cette expression s et z par leurs valeurs ci-dessus, nous obtenons sans difficulté

$$\xi = a_1\frac{\sigma}{\rho_0} + a_2\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^2 + a_3\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^3 + a_4\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^4,$$

les coefficients a ayant les valeurs

$$a_1 = \cos Z, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{tang} L_0 \sin^2 Z,$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}\,\frac{1+2\sin^2 L_0}{\cos^2 L_0}\sin^2 Z\cos Z + \frac{1}{6}e^2\cos^2 L_0\cos Z\cos 2Z,$$

$$a_4 = -\frac{1}{24}\,\frac{\operatorname{tang} L_0}{\cos^2 L_0}\left[4\sin^2 Z(2+\sin^2 L_0) - 3\sin^4 Z(3+2\sin^2 L_0)\right].$$

Ceci posé, si nous désignons respectivement par $\varkappa$ et k les longueurs de l'arc d'ellipse méridienne AM et de l'arc de cercle AM', nous avons

$$k = \rho'_0\xi = \varkappa + \frac{1}{6}e^2\cos^2 L_0\,\rho'_0\left(\frac{\varkappa}{\rho_0}\right)^3,$$

expression dans laquelle le terme en $\left(\frac{\varkappa}{\rho_0}\right)^3$ peut, à l'approximation requise, être remplacé par ξ^3. Il en résulte immédiatement

$$(1)\qquad \frac{\varkappa}{\rho_0} = a_1\frac{\sigma}{\rho_0} + a_2\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^2 + a'_3\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^3 + a_4\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^4,$$

avec

$$a'_3 = a_3 - \frac{1}{6}e^2\cos^2 L_0\cos^3 Z.$$

Mais nous possédons, par ailleurs, une autre expression nous faisant connaître $\frac{\varkappa}{\rho_0}$ en fonction des puissances croissantes de la différence x des latitudes sur l'ellipsoïde, c'est à savoir la formule de rectification de l'arc d'ellipse méridienne AM. En représentant par M, N, P, Q des polynomes

bien connus en e^2 [1], et posant pour abréger

$$(1-e^2)(1-e^2\sin^2 L_0)^{\frac{1}{2}} = \lambda,$$
$$M - N\cos 2L_0 + P\cos 4L_0 - Q\cos 6L_0 = (1-e^2\sin^2 L_0)^{-\frac{3}{2}} = \mu,$$
$$N\sin 2L_0 - 2P\sin 4L_0 = \nu,$$

nous avons, tous les termes du quatrième ordre inclus,

$$(2) \qquad \frac{\varkappa}{\rho_0} = \lambda\left(\mu x + \nu x^2 + \frac{2}{3}N\cos 2L_0 x^3\right).$$

De la comparaison de (1) et (2), il résulte que la différence de latitude cherchée x sera déterminée par l'équation

$$(3) \quad \lambda\left(\mu x + \nu x^2 + \frac{2}{3}N\cos 2L_0 x^3\right) = a_1\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right) + a_2\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^2 + a'_3\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^3 + a_4\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^4.$$

Or, la méthode classique des ingénieurs géographes nous fait connaître la valeur de x au troisième ordre inclus. En substituant cette valeur dans les termes en x^2 et x^3 du premier membre de (3), nous aurons finalement avec tous les termes du quatrième ordre,

$$\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2 L_0}x = a_1\frac{\sigma}{\rho_0} + [a_2 - \lambda\nu(1+2e^2\cos^2 L_0)\cos^2 Z]\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^2$$
$$+ \left[a'_3 + \lambda\nu\tang L_0\cos Z\sin^2 Z - \frac{2\lambda}{3}N\cos 2L_0\cos^3 Z\right]\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^3 + a_4\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^4.$$

Tous développements effectués et les seuls termes nécessaires étant conservés, cette formule peut s'écrire

$$x = (1 + e^2\cos^2 L_0 + e^4\cos^2 L_0 + e^6\cos^2 L_0)\cos Z\frac{\sigma}{\rho_0}$$
$$-\frac{1}{2}\tang L_0[\sin^2 Z + e^2\cos^2 L_0(1+2\cos^2 Z)$$
$$+ e^4\cos^2 L_0(1+2\cos^2 Z + 3\cos^2 L_0\cos^2 Z)]\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^2$$
$$-\frac{1}{6}\cos Z\{(1+3\tang^2 L_0)\sin^2 Z + e^2[2(1-4\sin^2 L_0) + \cos^2 Z(1+2\sin^2 L_0)]\}\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^3$$
$$-\frac{1}{24}\frac{\tang L_0}{\cos^2 L_0}\sin^2 Z[4(2+\sin^2 L_0) - 3\sin^2 Z(3+2\sin^2 L_0)]\left(\frac{\sigma}{\rho_0}\right)^4.$$

3. La différence de longitude du point M sur l'ellipsoïde étant la même que celle du point M' sur la sphère, il suffira, dans la formule sphérique, de substituer à s et z leurs expressions en σ et Z pour obtenir immédiatement

---

[1] Cf. Faye-Bourgeois, *Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique*, 1re Partie, fasc. 2, p. 81.

la différence cherchée sous la forme

$$\Delta G = \frac{\sin Z}{\cos L_0}\frac{\sigma}{\rho'_0} + \frac{\sin L_0 \sin Z \cos Z}{\cos^2 L_0}\left(\frac{\sigma}{\rho'_0}\right)^2$$
$$- \frac{1}{3}\frac{\sin Z}{\cos^3 L_0}\left[\sin^2 L_0 - \cos^2 Z(1 + 3\sin^2 L_0) - e^2 \cos^4 L_0 \cos^2 Z\right]\left(\frac{\sigma}{\rho'_0}\right)^3$$
$$- \frac{1}{3}\frac{\sin L_0}{\cos^4 L_0}\sin Z \cos Z\left[1 + 2\sin^2 L_0 - 3(1 + \sin^2 L_0)\cos^2 Z\right]\left(\frac{\sigma}{\rho'_0}\right)^4.$$

4. Quant à la convergence des méridiens qu'il suffit, pour les calculs successifs, de connaître au troisième ordre inclus, elle sera la même, à cette approximation, que si la géodésique tangentait à chacune de ses extrémités la section normale correspondante.

Son expression complète sera ainsi

$$\pm 180^\circ + \operatorname{tang} L_0 \sin Z \frac{\sigma}{\rho'_0} + \frac{1}{4}\sin 2Z(1 + 2\operatorname{tang}^2 L_0 + e^2\cos^2 L_0)\left(\frac{\sigma}{\rho'_0}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{6}\sin Z \operatorname{tang} L_0\left[2(3 + 4\operatorname{tang}^2 L_0)\cos^2 Z - (1 + 2\operatorname{tang}^2 L_0)\right]\left(\frac{\sigma}{\rho'_0}\right)^3.$$

ÉLECTIONS.

M. **A. Stodola** est élu Correspondant pour la Section de Mécanique par 37 suffrages contre 3 à M. *Riabouchinsky*.

Il y a 2 bulletins nuls.

M. **William Bowie** est élu Correspondant pour la Section de Géographie et Navigation par 41 suffrages contre 1 à M. *Adrien de Gerlache*.

CORRESPONDANCE.

M. **Serge Bernstein**, élu Correspondant pour la Section de Géométrie, adresse des remercîments à l'Académie.

MM. **Fernand Blondel**, **François Divisia** adressent des remercîments pour les distinctions que l'Académie a accordées à leurs travaux.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Giuseppe Armellini. *Trattato di Astronomia siderale.* Volume I, Parte generale.

2° *Isostasy, a learned Treatise on the Science of the Equilibrium of the Earth's Crust*, by William Bowie, et plusieurs Mémoires du même auteur, dont un en collaboration avec M. John F. Hayford sur l'*Isostasie.* (Présentés par M. Ch. Lallemand.)

3° Gaston Lautier. *Le Sud-Ouest méditerranéen* (Bas-Languedoc et Roussillon). Préface de Em. de Martonne. (Présenté par M. G. Perrier.)

4° Ludovic Gaurier. *Atlas des lacs des Pyrénées.* (Présenté par M. Helbronner.)

M. le **Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts** invite l'Académie à lui présenter une liste de deux ou trois candidats à chacune des deux chaires actuellement vacantes au *Conservatoire national des arts et métiers :*

1° *Chaire de chimie générale dans ses rapports avec l'industrie.* (Renvoyé à la section de chimie.)

2° *Chaire de physiologie du travail, hygiène industrielle, orientation professionnelle.* (Renvoyé à la section de médecine et chirurgie.)

GÉOMÉTRIE. — *Opérations sphériques et congruence paratactique.* Note [1] de M. **Paul Delens**, présentée par M. Hadamard.

Je poursuis ici [2] l'étude des opérations sphériques.

1. L'équation aux sphères-points d'un faisceau de sphères avec deux solutions (réelles ou imaginaires) 1, où ∞^1, détermine trois sortes de cercles

$$\mathcal{A}_1 = [aa'], \quad a^2 = a'^2 = 1, \quad a \mid a' = 0, \quad \text{(cercle propre)},$$
$$\mathcal{M}_0 = [am], \quad a^2 = 1, \quad m^2 = a \mid m = 0, \quad \text{(cercle point)},$$
$$\mathcal{J}_{00} = [mn], \quad m^2 = m \mid n = n^2 = 0, \quad \text{(cercle isotrope)}.$$

Les tenseurs symétriques, carrés de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{M}_0$, sont : $\mathcal{A}_1^2 = -(a^2 + a'^2)$, $\mathcal{M}_0^2 = -m^2$; les équations caractéristiques des trois types :

$$\mathcal{A}_1^3 + \mathcal{A}_1 = 0, \quad \mathcal{M}_0^3 = 0, \quad \mathcal{J}_{00}^2 = 0,$$

(1) Séance du 26 décembre 1928.

(2) Voir *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 1107.

donnent les opérations sphériques des groupes à un paramètre correspondants

(1) $$\mathcal{A}_1^{(\tau)} = \mathcal{U} + \sin\tau.\mathcal{A}_1 + (1 - \cos\tau)\mathcal{A}_1^2,$$

(2) $$\mathcal{M}_0^{(\tau)} = \mathcal{U} + \tau\mathcal{M}_0 + \frac{\tau^2}{2}\mathcal{M}_0^2,$$

(3) $$\mathcal{J}_{00}^{(\tau)} = \mathcal{U} + \tau\mathcal{J}_{00}.$$

Les trajectoires sont des cercles pour (1) et (2), des droites isotropes pour (3); (1) ou (2) est produit de deux inversions de sphères s, s', d'après

$$(2s^2 - \mathcal{U})|(2s'^2 - \mathcal{U}) = \mathcal{U} + 2s|s'[ss'] + 2[ss']^2.$$

Il n'en est pas de même pour (3); l'opérateur $\mathcal{J}_{00}^{(\tau)}$ est *gauche*.

2. La discussion des formes canoniques pour un torseur $\mathcal{H}$ repose sur l'étude des cercles du faisceau $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^3$ [1]; bornons-nous ici au cas, le plus général, du torseur somme de deux cercles propres *axiaux* (ou conjugués

$$\mathcal{H} = \lambda\mathcal{C}_1 + \lambda'\mathcal{C}'_1, \qquad \mathcal{C}_1\mathcal{C}'_1 = 0, \qquad \mathbf{K}(\mathcal{C}_1\mathcal{C}'_1) = \mathcal{C}'_1\mathcal{C}_1 = 0.$$

L'équation caractéristique est alors

$$(\lambda^2 - \lambda'^2)\mathcal{H}(\mathcal{H}^2 + \lambda^2)(\mathcal{H}^2 + \lambda'^2) = 0,$$

soit dans le cas général $\lambda^2 \neq \lambda'^2$, d'ordre 5; l'opération générale à deux angles $\theta = \lambda\tau$, $\theta' = \lambda'\tau$, du groupe de symbole $\mathcal{H}$, est

(4) $$\mathcal{H}^{(\theta,\theta')} = \mathcal{C}_1^{(\theta)}\mathcal{C}_1'^{(\theta')} = \mathcal{C}_1^{(\theta)} + \mathcal{C}_1'^{(\theta')} - \mathcal{U}.$$

Elle est aussi produit de deux transpositions de cercles $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, d'après

$$\mathcal{A}_1^{(\pi)}\mathcal{B}_1^{(\pi)} = \mathcal{U} + 2a|b[ab] + 2a'|b'[a'b'] + 2[ab]^2 + 2[a'b']^2,$$

$$\mathcal{A}_1 = [aa'], \qquad \mathcal{B}_1 = [bb'], \qquad \sin\omega\,\mathcal{C}_1[ab], \qquad \sin\omega'\mathcal{C}'_1 = [a'b'], \qquad a|b' = a'|b = 0,$$
$$a|b = \cos\omega, \qquad a'|b' = \cos\omega', \qquad \theta = 2\omega, \qquad \theta' = 2\omega';$$

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}'_1$ sont les cercles perpendiculaires communs de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{B}_1$, dont ω et ω' sont les angles élémentaires.

3. Pour $\lambda^2 = \lambda'^2$, $\mathcal{H}$ sera dit torseur paratactique, ou *parataxe*; soit la forme $\mathcal{P}_2 = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}'_1$, dont l'équation caractéristique est $\mathcal{P}_2^3 + \mathcal{P}_2 = 0$.

(5) $$\mathcal{P}_2^{(\tau)} = \mathcal{U} + \sin\tau\,\mathcal{P}_2 + (1 - \cos\tau)\mathcal{P}_2^2$$

est l'opération paratactique d'angle τ; les trajectoires du groupe de symbole $\mathcal{P}_2$ sont les cercles de la congruence paratactique; tels sont $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}'_1$.

---

(1) Une discussion équivalente est donnée par A. N. WHITEHEAD, *A Treatise on Universal Algebra* (Cambridge 1898), p. 286-299.

Les cercles $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{B}_1$ du cas précédent sont maintenant paratactiques et

$$-<\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1> = <\mathcal{A}_1^2, \mathcal{B}_1^2> = \frac{1}{2}\sin 2\omega\, \mathcal{P}_2,$$

$<\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}> \equiv \mathfrak{X}\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}\mathfrak{X}$ représentant la *parenthèse* de S. Lie entre $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$. Sans revenir sur les propriétés focales des cercles paratactiques ni les décompositions d'un parataxe, signalons cependant qu'un tel torseur est la somme de deux cercles isotropes non cosphériques :

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{Y}_{00} + \mathcal{J}_{00}, \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{Y}_{00} \| \mathcal{J}_{00} = -2.$$

4. Soient maintenant a, a', b, b', u cinq sphères orthogonales entre elles; un cercle $\mathcal{C}$, trajectoire d'un élément

$$e = e_0 \mathcal{P}_2^{\xi}, \qquad e_0 = \alpha a + \alpha' a' + \beta b + \beta b' + \gamma u.$$

est déterminé par deux sphères orthogonales à

$$e_0,\ o_0 \mathcal{P}_2,\ e^0 \mathcal{P}_2^2 = e_0 | (2u^2 - \mathfrak{U}),$$

d'où l'expression générale des cercles trajectoires; avec les notations

$$\mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P} = [aa' + bb'], \qquad \mathcal{Q} = [aa' - bb'], \qquad \mathcal{R} = [ab' - a'b], \qquad \mathcal{S} = [ab + a'b'],$$

$$\frac{\mathrm{T}}{-(a^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2)} = \frac{\mathrm{X}}{\alpha^2 + \alpha'^2 - \beta^2 - \beta'^2} = \frac{\mathrm{Y}}{2(\alpha\beta + \alpha'\beta')} = \frac{\mathrm{Z}}{-2(\alpha\beta' - \alpha'\beta)},$$

cette expression est

$$(6) \qquad \mathcal{C} = \mathrm{T}\mathcal{P} + \mathrm{X}\mathcal{Q} + \mathrm{Y}\mathcal{R} + \mathrm{Z}\mathcal{S}, \qquad \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 - \mathrm{T}^2 = 0,$$

et en particulier

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{P} + \mathrm{X}\mathcal{Q} + \mathrm{Y}\mathcal{R} + \mathrm{Z}\mathcal{S}), \qquad \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 - 1 \equiv 0.$$

Les parataxes $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ d'espèce opposée à celle de $\mathcal{P}$, lui sont *permutables*, d'où $<\mathcal{P}\mathcal{C}> = 0$; l'on remarque *l'analogie* quaternionienne des formules

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{Q}^2 = \mathcal{R}^2 = \mathcal{S}^2 = \mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{S}, \qquad \mathcal{Q}\mathcal{R}, \qquad \mathcal{R}\mathcal{Q} = \mathcal{S}, \ \ldots.$$

Bref, (6) donne la réprésentation sphérique des cercles de la congruence paratactique, et en outre une représentation spatiale des tenseurs de la congruence. Sans avoir l'élégance des énoncés géométriques de MM. Bloch et Hadamard, les formules précédentes contiennent l'essentiel de la théorie : elles permettent de démontrer que les transformées d'une *sphère* par rotation d'angle τ autour des divers cercles de la congruence sont encore orthogonales

à une même sphère. La notion de *puissance réduite* entre point et cercle, due à M. A. Bloch, a permis d'intéressantes interprétations; le carré de cette puissance étant traduit par $(m\mathcal{C}_1)^2 = -m^2 \| \mathcal{C}_1^2 = \mathfrak{M}_0^2 \| \mathcal{C}_1^2$, on peut les généraliser par des relations analogues entre invariants angulaires de sphères et de cercles, des types $(s\mathcal{C}_1)^2 = -s^2 \| \mathcal{C}_1^2$ et $\mathfrak{A}^2 \| \mathcal{C}_1^2$.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les surfaces réglées ayant pour asymptotiques des cubiques gauches*. Note de M. **Ch. Bioche**, présentée par M. G. Kœnigs.

J'ai indiqué (*Bull. Soc. Math. de France*, 26, p. 232) une construction de ces surfaces. Je vais en donner des équations paramétriques, et j'ajouterai une remarque relative à des formules de Cremona (*Annali di Matematica*, 2e série, 1).

1° Une surface en question est déterminée si l'on se donne une cubique gauche C et une droite D; la surface est engendrée par la droite qui joint un point M de C au point M_1 où le plan osculateur en M coupe D. La droite MM_1 rencontre la droite D′, conjuguée de D par rapport au complexe linéaire L auquel appartiennent les tangentes à C.

On peut représenter la cubique par les équations

$$\frac{X}{au^3} = \frac{Y}{au^2} = \frac{Z}{au} = \frac{T}{1}$$

et, si l'on écarte les cas où D serait, soit une corde de C, soit une sécante située dans le plan osculateur au point d'intersection, la droite D peut se représenter par

$$Y = 0, \qquad X = mZ + pT,$$

en choisissant convenablement le tétraèdre de référence. La droite D′ a alors pour équations

$$X = pT, \qquad 3Y + amT = 0.$$

Je ferai $T = 1$ pour simplifier les écritures.

2° Les surfaces considérées peuvent se représenter paramétriquement par

$$(1) \qquad \frac{X - au^3}{3au^5 - 3pu^2} = \frac{Y - au^2}{3au^4 + amu^2} = \frac{Z - au}{2au^3 + mau + p} = -\rho.$$

Pour avoir l'équation des lignes asymptotiques il suffit d'écrire que les valeurs de ρ, correspondant à un point M et aux points où la génératrice

coupe C, D et D′, ont un rapport anharmonique constant. On obtient

$$\rho = \frac{1}{3u^2 + v},$$

le rapport anharmonique en question étant $1 - \frac{m}{v}$. On a alors pour équations paramétriques mettant en évidence les asymptotiques

$$\text{(II)} \qquad \frac{X}{au^3v + 3pu^2} = \frac{Y}{au^2(v-m)} = \frac{Z}{au^3 + au(v-m) - p} = \frac{1}{3u^2 + v}.$$

3° Si $m \neq 0$ et $p \neq 0$, on a une surface du sixième ordre à directrices triples distinctes. Si $m = 0$, $p \neq 0$ les équations conservent leur forme, D et D′ étant confondues. Si $m \pm 0$, $p = 0$, D est directrice triple, D′ directrice double, la surface est du cinquième ordre. Si $m = 0$, $p = 0$, D est tangente à C et coïncide avec D′. On a une surface du troisième ordre, dite surface de Cayley.

4° Je reprends les cas écartés plus haut. Si D est une corde on peut la représenter par

$$Y = 0, \qquad Z = 0.$$

D′ est alors représentée par

$$X = 0, \qquad T = 0,$$

D est directrice triple et D′ directrice simple; la surface est du quatrième ordre. Elle peut se représenter par

$$\frac{X}{au^3} = \frac{Y}{au^2v} = \frac{Z}{auv} = \frac{T}{1},$$

les lignes asymptotiques étant données par $v = \text{const.}$ Si D est un plan osculateur et coupe c on peut le représenter par

$$X = 0, \qquad Z = 0:$$

comme D appartient au complexe L, D′ se confond avec elle, la surface est du quatrième ordre, D et D′ étant des directrices doubles. Elle se représente par

$$\frac{X}{au^3v} = \frac{Y}{au^2(v-u)} = \frac{Z}{auv} = \frac{T}{3u+v},$$

$v = \text{const.}$ donnant une asymptotique.

5° En utilisant la représentation donnée par les équations (1) on constate facilement que les surfaces correspondantes ont des sections planes présentant des rebroussements, situés sur les génératrices qui sont tangentes

à c et n'ont pas leurs points de contact sur une directrice. Le même fait se produit pour les surfaces du quatrième ordre dont on peut, d'ailleurs, avoir facilement les équations cartésiennes. Ceci permet d'expliquer une difficulté qui se présente dans l'application de formules générales données par Cremona.

D'après ces formules, le degré des asymptotiques des surfaces réglées à directrices d'ordres m et n $(m > n)$ ayant leurs sections planes unicursales est

$$2(m+n-1) \quad \text{si les directrices sont distinctes;}$$
$$2m+n-2 \quad \text{si les directrices sont confondues.}$$

On obtient des nombres ordinairement trop grands, parce que Cremona ne supposait aux sections planes que des points doubles. Or il y a des rebroussements; et l'on sait qu'en général sur une surface réglée dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire il y a une courbe dont les tangentes appartiennent à ce complexe; elle est asymptotique et d'un degré égal à la classe d'une section plane. D'autre part cette courbe peut se décomposer en deux courbes de degré moitié; ce fait se présente nécessairement quand les asymptotiques sont des cubiques.

Si l'on retranche des nombres qui résultent des formules de Cremona le nombre des rebroussements on trouve 3 pour les surfaces à directrices confondues que j'ai indiquées, et 6 pour les surfaces à directrices distinctes, surfaces pour lesquelles les asymptotiques se trouvent composées de paires de cubiques.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les valeurs limites des fonctions analytiques.* Note de M. V. Smirnoff, présentée par M. Hadamard.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle K $(|z| < 1)$. Nous dirons que $f(z)$ appartient à la classe H_δ $(\delta > 0)$, si les intégrales

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^\delta \, d\vartheta$$

restent bornées pour $r \to 1$. On sait que, dans ce cas, $f(z)$ a presque partout les valeurs limites $f(e^{i\vartheta})$ sur les chemins non tangents et que $|g(e^{i\vartheta})|^\delta$ est sommable (¹). Notre but est de signaler deux théorèmes nouveaux sur les

(¹) F. Riesz, *Mathem. Zeitschrift*, 18, 1923, p. 94.

fonctions qui appartiennent à la classe mentionnée. Il nous semble qu'il est facile de tirer de ces théorèmes des conséquences importantes pour la théorie des fonctions.

Théorème I. — *Si $f(z)$ appartient à une classe $H_\delta(\delta > 0)$ et la fonction*

$$f(e^{i\vartheta})^\lambda \quad (\lambda > \delta)$$

est sommable, la fonction $f(z)$ appartient aussi à la classe H_λ.

Remarquons que la première condition du théorème est essentielle. Nous dirons que $f(z)$ est représentable par l'intégrale de Cauchy ou par l'intégrale de Cauchy-Stieltjès, si l'on a

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(z'=e^{i\vartheta})}\frac{\varphi(z')}{z'-z}\,dz'$$

ou

$$(2) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(z'=e^{i\vartheta})}\frac{d\psi(z')}{z'-z},$$

où $\varphi(z')$ est une fonction sommable et $\psi(z')$ une fonction à variation bornée.

Théorème II. — *Si $f(z)$ est représentable par l'intégrale de Cauchy ou de Cauchy-Stieltjès, elle appartient à toutes les classes H_δ pour $\delta < 1$.*

Faisons quelques remarques. On peut construire des fonctions qui sont représentables par l'intégrale de Cauchy de la forme (1), mais pour lesquelles la formule de Cauchy

$$(3) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z'=e^{\vartheta i}}\frac{f(e^{i\vartheta})}{z'-z}\,dz'$$

n'a pas lieu. L'exemple d'une telle fonction est

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{\log n} \quad (^1).$$

Remarquons encore que toutes les classes H_δ pour $\delta > 1$ contiennent, outre les fonctions mentionnées dans le théorème II, quelques fonctions qui ne sont pas représentables par l'intégrale de Cauchy ou de Cauchy-Stieltjès. Par exemple,

$$f(z) = \frac{\log(1-z)}{1-z}.$$

Notons quelques conséquences immédiates des théorèmes précédents.

---

(1) Cet exemple m'a été communiqué par M. G. M. Fichtenholz.

1. Si une fonction est représentable par la formule de Cauchy (3), elle appartient à H_1.

2. Si $f(z)$ est représentable par l'intégrale de Cauchy, mais si la formule (3) n'a pas lieu, $f(e^{i\vartheta})$ n'est pas sommable.

3. Si une série trigonométrique, conjuguée de la série Fourier-Lebesgue, n'est pas une série Fourier-Lebesgue, elle est sommable par le procédé de Fejér vers une fonction qui n'est pas sommable.

4. On peut donner la représentation paramétrique pour toutes les fonctions de la classe H_δ (¹) :

$$f(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log p(\vartheta)\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}d\vartheta}\, z^k \prod |z_s| \frac{1-\frac{z}{z_s}}{1-\bar{z}_s z}\, e^{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}d\psi(\vartheta)}.$$

Dans cette formule, $p(\vartheta)$ est une fonction quelconque positive pour $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, pour laquelle $[p(\vartheta)]^\delta$ et $\log p(\vartheta)$ sont sommables; $|z_s| < 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$ et le produit $\Pi |z_s|$ est convergent, si ce produit est infini; $\psi(\vartheta)$ est une fonction quelconque décroissante pour $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ et $\psi'(\vartheta) = 0$ presque partout.

La démonstration des théorèmes I et II est très simple.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Comparaison de divers théorèmes sur les séries de Taylor.* Note de M. **Soula**, présentée par M. Hadamard.

1. Soit une série de Taylor à rayon de convergence fini $f(z) = \Sigma a_n z^n$; je divise la suite des termes en groupes dont le premier contient h_1 termes, le deuxième h_2, les suivants h_3, h_4, ... et je suppose que

$$\frac{h_n}{h_1 + h_2 + \ldots + h_{n-1}}$$

tende vers zéro. Soit p_n le nombre des termes du $n^{\text{ième}}$ groupe qui ne sont pas nuls; la limite supérieure de $\frac{p_n}{h_n}$ sera appelée la « densité en détail » des coefficients non nuls de la série relativement au groupement de termes considéré. M. Fabry a démontré le théorème suivant (²) :

I. Si la fonction $f(z)$ est holomorphe sur un arc du cercle de conver-

(¹) Szegö, *Math. Annalen*, 84, 1921, p. 233.

(²) Fabry, *Sur les séries de Taylor* (*Acta mathematica*, 22, 1898, p. 86).

gence dont la mesure soit égale à 2Ω, la densité en détail des coefficients non nuls est au moins égale à $\frac{\Omega}{\pi}$. L'énoncé de M. Fabry est plus général encore, car il ne fait pas intervenir tous les coefficients, mais il existe des méthodes pour ramener le cas général au cas particulier énoncé.

Je me suis occupé du cas où il n'y a qu'un nombre fini p de points singuliers sur le cercle de convergence; il est clair que la densité en détail des coefficients non nuls doit être au moins égale à $\frac{1}{p}$ dans ce cas, et il semble que l'on ne peut aller plus loin, car cette densité est $\frac{1}{p}$ pour $f(z) = \frac{1}{1-z^p}$. Il est possible cependant de montrer que la densité est 1, sauf dans des cas analogues au précédent.

II. Si une série de Taylor représente une fonction qui n'a qu'un nombre fini de points singuliers sur le cercle de convergence, la densité en détail des coefficients non nuls est égale à 1, sauf peut-être dans le cas où il existe une suite de coefficients $a_{m\nu+k}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$) dont les indices forment une progression arithmétique de raison m et tels que $\Sigma a_{m\nu+k} z^{m\nu}$ a son rayon de convergence supérieur à celui de $f(z)$. Pour la démonstration, il suffit d'employer une méthode due à M. Carlson (¹).

2. Soit $S(x)$ le nombre des coefficients non nuls dont l'indice est inférieur à x. La limite supérieure de $\frac{S(x)}{x}$ sera la « densité supérieure » de ces coefficients. J'ai démontré le théorème suivant dont des cas particuliers ont été souvent retrouvés et qui s'applique d'ailleurs aux fonctions entières (²):

III. Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans un angle de sommet O et d'ouverture 2Ω, si, de plus, il existe M tel que $|z^M f(z)|$ reste borné dans cet angle pour $|z|$ supérieur à une valeur donnée, la densité supérieure des coefficients non nuls est au moins égale à $\frac{\Omega}{\pi}$.

Ce théorème se laisse compléter comme celui de M. Fabry.

IV. Si $f(z)$ est holomorphe dans l'étoile E qui s'obtient en traçant dans le plan un nombre fini de coupures rectilignes portées par des rayons issus de O, si, de plus, $|z^M f(z)|$ est borné pour $|z|$ assez grand, la densité supé-

---

(¹) CARLSON, *Ueber Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten* (*Math. Annalen*, **79**, 1919, p. 119).

(²) *Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de coefficients nuls* (*Comptes rendus*, **176**, 1923, p. 877).

rieure des coefficients non nuls est égale à 1. Il peut cependant y avoir des exceptions analogues à celles du théorème II.

3. M. Pólya a démontré que la densité supérieure des coefficients non nuls est égale à 1 sous la seule condition que $f(z)$ n'ait qu'un point singulier sur le cercle de convergence et que ce point soit semi-isolé; la densité des coefficients forts, c'est-à-dire de ceux qui vérifient $|a_m| > (1-\varepsilon)^m \rho^{-m}$ pour ε petit arbitraire et constant, est aussi égale à 1 (¹). C'est là un énoncé plus précis que celui du théorème III dans le cas où $\Omega = \pi$. On est donc conduit à se demander si le théorème III ne peut pas être complété pour $\Omega < \pi$. Je me bornerai à signaler que la suite des coefficients forts n'a pas nécessairement 1 pour densité supérieure dans ce cas général. On le démontre aisément par un exemple formé à l'aide de séries bien connues qui n'ont qu'un point singulier sur le cercle de convergence et dont la densité supérieure des coefficients non nuls est inférieure à 1.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Contribution à l'étude de la capacité et de la série de Wiener.* Note (²) de MM. **O.-D. Kellogg** et **Florin Vasilesco**, présentée par M. Hadamard.

On se rappelle le critère de M. Wiener (³).

Soient D un domaine de l'espace à 3 ou plus de 3 dimensions, P un point de sa frontière et $\gamma_n(P)$ la capacité de l'ensemble des points n'appartenant pas à D et compris dans la couronne déterminée par les sphères $\lambda^n(P)$ et $\lambda^{n+1}(P)$ de centre P et de rayons λ^n et λ^{n+1} $(\lambda < 1)$.

Le point P est régulier ou irrégulier pour D, suivant que la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{\gamma_n(P)}{\lambda^n}$$

diverge ou converge.

Nous allons, d'abord, donner à ce critère d'autres formes qui nous ont été plus commodes dans certaines de nos recherches en vue de la résolution du problème suivant :

(¹) Pólya, *Sur un théorème de M. Hadamard* (*Comptes rendus*, **184**, 1927, p. 579).

(²) Séance du 2 janvier 1929.

(³) Wiener, *Bulletin Massachussettes Inst. of Tech.*, **59**, avril 1924, p. 130. Voir aussi Kellogg, *Recent progress with the Dirichlet problem* (*Bulletin of the American Math. Society*, **32**, novembre-décembre 1926, p. 617).

Existe-t-il des ensembles de capacité positive sans points réguliers? problème auquel nous allons apporter ici-même de nouvelles contributions [1].

I. *Dans le critère de M. Wiener, on peut donner à $\gamma_n(P)$ la signification de la capacité de l'ensemble des points n'appartenant pas à D, mais contenus dans toute sphère $\lambda^n(P)$.*

Dès lors, on peut utiliser pour ce critère non seulement des sphères, mais aussi une grande variété d'autres régions tendant, en se resserrant, vers P.

Dans la suite, nous entendrons par « série de Wiener » la série où $\gamma_n(P)$ a la signification du théorème précédent.

II. *Si la série de Wiener diverge en P, auquel cas elle a la valeur $+\infty$, elle y est continue.*

La série n'est pas nécessairement continue en un point où elle converge.

On en conclut, comme une contribution possible au problème qui nous intéresse, que :

III. *Si la série de Wiener relative à un ensemble fermé borné E* [2] *est bornée aux points d'un ensemble partout dense sur E, elle est partout finie sur E qui, de ce fait, n'a que des points irréguliers.*

Voici une autre forme du critère de M. Wiener.

IV. *Le point P est régulier ou irrégulier, suivant que*

$$\int_0^{\infty} c(e^{-x})\, e^x\, dx = \int_0^1 \frac{c(\rho)}{\rho^2}\, d\rho$$

existe ou n'existe pas.

Ici $c(y)$ représente la capacité de l'ensemble des points non situés dans D, mais contenus dans la sphère de rayon y et de centre P.

Rappelons maintenant une notion de voisinage relative aux ensembles [3].

On dit que deux ensembles fermés bornés e et e' diffèrent de ε au plus, lorsque e' est contenu dans l'ensemble V_ε des sphères de rayon ε ayant comme centre chacun des points de e, et que e est contenu dans l'ensemble V_ε relatif à e'.

---

(1) Voir O.-D. Kellogg, *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 526; Florin Vasilesco, *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 635 et 1116.

(2) Le problème ne se pose, en effet, que si E est la frontière d'un seul domaine (ensemble ouvert) d'un seul tenant. Voir Florin Vasilesco, *Sur les singularités des fonctions harmoniques*, n° 38, Mémoire qui paraîtra prochainement dans un autre Recueil.

(3) Voir Florin Vasilesco, *Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles* (*Thèse*, Gauthier-Villars, Paris, 1925, p. 7).

A l'aide de cette notion nous pouvons énoncer le théorème suivant :

V. *Soient* E *un ensemble fermé borné et* e *une quelconque de ses parties fermées. La capacité de* e *est une fonction d'ensemble semi-continue supérieurement, qui n'est continue que si* E *est de capacité nulle.*

En appliquant ce résultat à la série de Wiener, on obtient cet énoncé :

VI. *Soient* E *un ensemble fermé, borné, et* P *un de ses points. La fonction* $\gamma_n(\mathrm{P})$ [voir I] *est semi-continue supérieurement et, par conséquent, de la classe* 1 *de M. Baire. Elle n'est pas, en général, continue. La série de Wiener est donc, en général, de deuxième classe.*

Cependant il y a des cas où l'on peut abaisser cette classe d'une unité.

VII. *Si la sphère* $\lambda^n(\mathrm{P})$ (voir I) *détermine sur* E *un ensemble de capacité nulle,* $\gamma_n(\mathrm{P})$ *est continue en* P. *Si cela a lieu quels que soient* n *et* P; *les* $\gamma_n(\mathrm{P})$ *sont continues et la série de Wiener est de classe* 1. *Elle est, de plus, semi-continue inférieurement* (¹).

Tout ensemble plan ou situé sur une autre surface analytique, etc. satisfait au théorème précédent. C'est donc parmi de tels ensembles qu'il faut chercher un exemple *d'ensemble de capacité positive sans points réguliers.* Voici comment on peut avancer cette recherche. Puisque la série de Wiener d'un tel ensemble est semi-continue inférieurement, E est la somme des ensembles E_n aux points desquels elle est inférieure ou égale à A_n, les nombres A_n croissant indéfiniment. Or, on sait que dans ce cas, l'un au moins des E_n doit être de capacité positive (²). Nous avons donc cet énoncé général, nouvelle contribution au problème qui nous intéresse :

VIII. *S'il existe un ensemble fermé borné de capacité positive sans points réguliers, on peut en extraire un autre de même nature pour lequel la série de Wiener soit bornée, ait ses termes fonctions continues, et soit, de ce fait, semi-continue inférieurement.*

Ces résultats seront développés dans un Mémoire ultérieur.

(¹) Dans ce théorème et dans le précédent, nous avons spécialement en vue un ensemble E frontière d'un seul domaine d'un seul tenant. Si, toutefois, il n'en était pas ainsi, E serait considéré comme la frontière du seul domaine infini et composé de tous les points n'appartenant pas à ce domaine.

(²) Voir FLORIN VASILESCO, *Sur les singularités* (*loc. cit.*), nº 8.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe de congruences.* Note (¹) de M. **A. Demoulin**, présentée par M. Goursat.

M. Masloff a déterminé, dans une Communication récente (²), une classe étendue de surfaces de Bianchi. J'ai été conduit à ces surfaces, en 1920, dans un Mémoire intitulé *Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques* (³). Les équations qui figurent à la page 796 de la Note de M. Masloff sont idendiques, à la notation près, aux équations (165′) et (166) dudit Mémoire,

Dans le même travail, j'ai obtenu aussi des surfaces de Bianchi dépendant non seulement de l'intégrale générale d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, comme les surfaces dont il est question plus haut, mais de constantes arbitraires dont le nombre est arbitrairement grand.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la transformation des équations aux dérivées partielles du second ordre par l'usage explicite des variables caractéristiques d'Ampère.* Note de M. **Jules Drach**, transmise par M. Émile Borel.

J'ai montré récemment (⁴) quel intérêt il y a à remplacer une équation du second ordre $r = f(x, y, z, p, q, s, t)$ par un système (Σ) *à caractéristiques explicites* (α, β). Les dérivées *principales* de (Σ) sont, par exemple, toutes les dérivées de y, z, p, q, s et $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}$; les dérivées *paramétriques* sont les dérivées de x et de t relatives à une seule des variables (α, β), chaque ordre de dérivation en ajoute quatre.

Ce système (Σ), formé à partir du second ordre, comprend en particulier les systèmes d'ordre supérieur auxquels conduit la méthode de Darboux.

J'indique ici deux nouvelles applications.

(¹) Séance du 2 janvier 1929.

(²) *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 794-796.

(³) *Bulletins de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique*, 5ᵉ série, 6, 1920, p. 192-215, 418-438, 503-523; 7, 1921, p. 10-32.

(⁴) *Comptes rendus*, 182, 1926, p. 1593, et 183, 1926, p. 109.

I. Pour une équation $r=f(s,\ t)$ on a trouvé, pour définir la solution générale, des formules (F) :

$$u_1 y+u_2 x=u, \qquad v_1 y+v_2 x=v;$$

$$dr=u_2^2\,d\alpha+v_2^2\,d\beta, \qquad ds=u_1 u_2\,d\alpha+v_1 v_2\,d\beta, \qquad dt=u_1^2\,d\alpha+v_1^2\,d\beta;$$

$$2\,dZ=u^2\,d\alpha+v^2\,d\beta, \qquad dP=uu_2\,d\alpha+vv_2\,d\beta, \qquad dQ=uu_1\,d\alpha+vv_1\,d\beta,$$

où l'on a posé :

$$Z=z-(px+qy)+\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2), \qquad P=rx+sy-p, \qquad Q=sx+ty-q$$

et où l'on désigne par (u, v), (u_1, v_1), (u_2, v_2) trois solutions du système (A) : $\frac{\partial u}{\partial\beta}=\lambda v$, $\frac{\partial v}{\partial\alpha}=\lambda u$. Les variables α, β sont *ici* des fonctions déterminées de s et t à l'aide desquelles on peut calculer $\lambda(\alpha,\ \beta)$; (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont connus et (u, v), solution générale de (A), dépend de deux fonctions arbitraires.

Les formules (F) subsistent sous la condition que l'on ait *identiquement*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}f+\frac{\partial f}{\partial q}s=0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}s+\frac{\partial f}{\partial q}t=0.$$

L'équation du second ordre est alors une relation quelconque entre les six éléments Z, P, Q, r, s, t; dans le cas général α, β ne sont pas des fonctions déterminées de x, y, z et des dérivées de z en x, y, on ne peut alors que transformer le problème en un autre où les inconnues sont les trois couples (u, v), (u_1, v_1), (u_2, v_2) et $\lambda(\alpha,\ \beta)$.

Mais il existe des cas étendus où l'on peut aller plus loin. Par exemple si l'équation est $Z=\Phi(Q,\ t)$, α et β sont déterminés en Q et t et $\lambda(\alpha,\ \beta)$, (u, v), (u_1, v_1) peuvent se calculer; les arbitraires de la solution générale figurent dans (u_2, v_2). Inversement tout couple de solutions (u, v), (u_1, v_1) d'un système (A) donne Q, t et $\Phi(Q,\ t)$.

Pour les équations $Z=\Phi(P,\ Q)$ on a plus simplement encore $y=\beta x$, $Z=\alpha$ et l'on détermine par quadratures la solution générale.

Pour les équations linéaires à coefficients constants entre Z, P, Q, r, s, t, α et β sont déterminés en x, y. Il est également possible de trouver tous les cas où α et β sont déterminés en x, y, z, p, q, s, t.

II. Les équations $rt-s^2+\lambda^2(x,\ y)=0$ conduisent à un système (Σ) donnant $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ au moyen de x, y et de leurs dérivées premières, que l'on peut transformer comme suit :

Si l'on pose $\xi = x\sqrt{\lambda}$, $\eta = y\sqrt{\lambda}$, $\zeta \equiv \sqrt{\lambda}$ les trois fonctions ξ, η, ζ sont trois solutions d'une équation $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = M\theta$, liées par une relation *qui ne dépend que de* $\lambda(x, y)$.

La nouvelle inconnue du problème sera $M(\alpha, \beta)$. C'est ainsi que l'équation des surfaces à courbure totale constante conduit à la relation $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ et à l'équation $2\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \sin 2\omega$ avec $M = \cos 2\omega$. La relation $\xi\eta\zeta = 1$ a été récemment rencontrée par M. G. Tzitzéica dans la recherche des surfaces pour lesquelles la courbure totale est proportionnelle à la quatrième puissance de la distance de l'origine au plan tangent [1].

On observera qu'il est loisible de faire subir, pour *réduire* λ, une transformation linéaire et homogène à ξ, η, ζ.

De même, si l'on considère les équations

$$rt - s^2 + \lambda^2(x, y; p, q) = 0$$

et si l'on pose

$$\xi = x\sqrt{\lambda}, \qquad \eta = y\sqrt{\lambda}, \qquad \zeta = \sqrt{\lambda}, \qquad \xi_1 = \frac{p}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \eta_1 = \frac{q}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

ξ, η, ζ sont solutions d'une équation de Moutard et ξ_1, η_1, ζ_1 sont solutions de la transformée de Moutard; il existe alors entre les cinq éléments ξ, η, ζ, ξ_1, η_1 une relation *qui ne dépend que de* λ, d'où la transformation du problème.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur une classe de fonctions analytiques.* Note de M. **Arnaud Denjoy**, présentée par M. Hadamard.

Considérons la classe E des fonctions f analytiques en z, holomorphes et de module inférieur à 1 dans le cercle C défini par $|z| < 1$. Il est naturel de se demander sous quelles conditions f est déterminée par ses valeurs supposées connues en une suite de points a, a_1, a_2, ..., a_n, ... Soit $b_n = f(a_n)$. Posant $a_n = r_n e^{-i\alpha_n}$, on suppose $r_n < 1$; on admet cependant $|a_n| = 1$, pourvu que $|b_n| = 1$ et que la dérivée (normale) de f en a_n soit donnée. On sait qu'elle est positive.

(1) Georges Tzitzéica, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, p. 250; voir aussi Jonas, *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 96.

Si p des a_n coïncident avec un même point a' intérieur à C, cela signifie qu'en a', f et ses $p-1$ dérivées premières sont données.

Soit d'abord $f(a)=b=r'e^{-i\beta}$ avec $r<1$, $r'<1$. Posons

$$(1) \qquad \frac{r'-fe^{i\beta}}{1-r'fe^{i\beta}}=\frac{r-ze^{i\alpha}}{1-rze^{i\alpha}}\times\frac{rr'-f_1e^{i\gamma}}{1-rr'f_1e^{i\gamma}};$$

f_1 comporte le paramètre γ, f_1 est une fonction de classe E en même temps que f. Si $r=r'=1$, la dérivée normale de f au point a étant le nombre positif $\frac{1}{\lambda}$, la relation précédente est remplacée par

$$(1^{bis}) \qquad \frac{1}{1-fe^{i\beta}}=\frac{\lambda}{1-ze^{i\alpha}}+\frac{1+\lambda f_1e^{i\gamma}}{1-f_1e^{i\gamma}}.$$

La relation (1) ou (1bis) donne $f_1(a_1)=r'_1e^{-i\beta_1}$ au moyen de $f(a_1)=b_1$. Dans (1) ou (1bis) on remplace f par f_1, f_1 par f_2, r, r', α, β, γ respectivement par r_1, r'_1, α_1, β_1, γ_1.

On a une relation donnant une fonction f_2 de classe E, et $f_2(a_2)$ se calcule au moyen de $f(a_2)$. Soit $f_2(a_2)=r'_2e^{-i\beta_2}$. On continue ainsi indéfiniment.

On définit successivement f_n pour toute valeur entière de n et l'on calcule $f_n(a_n)=b'_n=r'_ne^{-i\beta_n}$ au moyen de b, b_1, b_2, ..., b_n. Une condition nécessaire pour que f soit bien de classe E est que l'on ait toujours $r'_n\leqq 1$. On aboutit au résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que la suite $b_n=f(a_n)$ détermine f sans ambiguïté est que la série $\sum\frac{1-r_n}{1-r'_n}$ soit divergente.

Si $r_n=r'_n=1$, $\frac{1-r_n}{1-r'_n}$ doit être remplacé par λ_n, si $\frac{1}{\lambda_n}$ est la dérivée normale de f_n au point $a_n=e^{-i\alpha_n}$.

Les considérations précédentes conduisent à un développement de f en fraction continue

$$f=A_0+\cfrac{A_1}{B_1+\cfrac{A_2}{B_2+\dots}}$$

A_n est un trinome du second degré en z proportionnel à

$$(r_n-ze^{i\alpha_n})(1-r_ne^{i\alpha_n}z),$$

B_n étant linéaire en z. La condition ci-dessus est la condition de convergence du développement.

On a un cas intéressant si $r_n = r'_n < 1$ et si $r_n = r'_n = 1$, avec $\lambda_n \geq k$.

Plus particulièrement, si $b'_n = a_n$ quel que soit n, avec $\lambda_n \geq 1$ si $r_n = 1$, f est déterminée par la suite des points a_n.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur l'approximation des fonctions presque périodiques généralisées.* Note [1] de M. **Alexandre Kovanko**, présentée par M. Émile Borel.

Le but de la Note présente c'est la généralisation de la définition des fonctions asymptotiquement presque périodiques de H. Weyl [2] et celles de P. Franklin [3] pour les fonctions mesurables et leur approximation par des sommes finies de fonctions périodiques. Nous disons que la fonction mesurable $f(x)$ sur $(-\infty, +\infty)$ est asymptotiquement presque périodique (brièvement a. p. p.), si à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspondent deux nombres $l(\varepsilon)$ et $T_0(\varepsilon)$ tels que, dans chaque intervalle de longueur l, il existe une presque période $\tau(\varepsilon)$ telle que

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$$

pour tout x, exclusion faite d'un ensemble de densité $< \varepsilon$ sur chaque intervalle de longueur $> T_0(\varepsilon)$.

Cette définition contient comme cas particulier les définitions de H. Weyl et P. Franklin.

Théorème I. — Soit $f(x)$ a. p. p. (en notre sens) si $[f(x)]^5$ est uniformément sommable [4], alors pour $\rho = 1$, $f(x)$ est a. p. p. selon P. Franklin, et pour $\rho = 2$ selon H. Weyl.

Théorème II. — La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit a. p. p. consiste en ce qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ il est possible de faire correspondre un nombre $T_0(\varepsilon) > 0$ et une somme

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_k e^{-i\lambda_k x} \qquad (\lambda_k \text{ étant réelles}),$$

(1) Séance du 26 décembre 1928.

(2) *Math. Ann.*, 97, 1927, p. 338.

(3) *Math. Zeitschr.*, 29, 1928, p. 70.

(4) A toute paire $\varepsilon > 0$ et $d > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ tel que

$$\left|\int_E [f]^5 dx\right| < \varepsilon \qquad \text{pour Mes } E < \eta \text{ et diamètre } (E) < d.$$

que

$$\left| f(x) - \sum_{k=n}^{k=1} a_k e^{-i\lambda_n x} \right| < \varepsilon$$

pour tout x, exclusion faite d'un ensemble de densité $< \varepsilon$ sur chaque intervalle de longueur $> T_0(\varepsilon)$.

La somme et le produit de deux fonctions a. p. p. est une fonction a. p. p..

HYDRODYNAMIQUE. — *Mouvement lent, non permanent, d'un cylindre quelconque en liquide visqueux incompressible.* Note (1) de M. **A. Gay**, présentée par M. G. Kœnigs.

I. Stokes (2) en 1851 a étudié la résistance qu'un liquide visqueux oppose à une sphère en translation rectiligne lente et périodique.

Le problème est repris en 1885 par M. Boussinesq (3), pour la sphère et le cylindre de révolution en translation lente, quelconque. Basset (4) traite le cas de la rotation de la sphère autour d'un diamètre et il intègre l'équation de la chute d'une sphère en liquide visqueux. Le cas de la sphère avec des vitesses quelconques données à la surface est étudié par Oseen (5), qui retrouve en particulier les résultats de Boussinesq.

Une solution générale du même problème, mais pour un solide quelconque, a été indiquée par Odqvist (6).

Je me propose dans cette Note d'étudier le mouvement lent d'un cylindre quelconque, en déterminant en tout point du liquide la pression et le tourbillon; je déduis de cette étude la forme du dyname des efforts qu'exerce le liquide sur le solide, en fonction du torseur des rotations instantanées, ainsi que la forme du système définissant ce torseur. J'examine en particulier le cas du cylindre de révolution.

---

(1) Séance du 3 décembre 1928.

(2) Stokes, *Mémoire sur le Pendule* (*Transact. Cambridge*, 9, Partie II, 1851).

(3) Boussinesq, *Comptes rendus*, 100, 1885, p. 935 et 974.

(4) Basset, *Philos. Trans. of London*, 179 A, 1888, p. 43, et *Quart. Journ. of Mathem.*, 1910. — Voir aussi Havelock, *Philos. Mag.*, 2, 1921, p. 30.

(5) Oseen, *Arkiv för Math. Astron. och Phys.*, 6, i, 1910, p. 1; 14, i et ii, 1919, p. 1

(6) Odqvist, *Arkiv for Math. Astron. och Phys.*, 19, iv, p. 1227.

En imitant des calculs analogues ([1]), je propose une théorie des constantes caractéristiques et des solutions fondamentales et j'indique un développement de la solution du problème en séries de solutions fondamentales.

II. Le mouvement est plan, les axes sont liés à la section droite σ du cylindre, u et v sont les projections sur ces axes de la vitesse absolue V au point $M(x, y)$; V_r et V_e les vitesses relative et d'entraînement. Le mouvement absolu étant lent et la force extérieure négligeable, les équations générales (E) sont l'équation de continuité et les équations de Navier où les dérivées totales par rapport à t sont remplacées par des dérivées partielles et où les seconds membres sont les projections du vecteur

$$T = 2 \operatorname{rot}. V_r \wedge V_e.$$

V se réduit sur σ à V_e et pour $t = 0$ à la vitesse initiale V_0 (à l'infini, V et la pression p s'annulent).

Si l'on néglige T, la solution obtenue est telle que V est du premier ordre par rapport au torseur R des rotations instantanées et T du second; de plus T s'annule à l'infini comme $\frac{1}{\rho^2}$ où $\rho = OM$ et l'on peut, en première approximation, négliger T. La densité est égale à 1; μ est le coefficient de viscosité; Q un point de σ; ψ l'angle de $\overrightarrow{QM}$ avec la normale Mn extérieure à σ; M_1 le point de coordonnées :

$$x + 2a\sqrt{\tau}, \qquad y + 2b\sqrt{\tau} \qquad \text{où} \qquad \tau = \mu(t - \theta);$$

σ_1 le lieu de M_1 lorsque M décrit σ. On désigne par δ et δ_1 les distances MQ et M_1Q et l'on pose en général

$$\overline{f(M_1, t)} = \frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2+b^2)} f(M_1, t)\, da\, db, \qquad F(M_1, t) = \int_0^t \overline{f(M_1, \theta)}\, d\theta,$$

$$(f''g) = \int_\sigma f(M)\, g(M, Q)\, d\sigma_Q, \qquad (f\,g) = \int_0^t f(\tau)\, g(\theta)\, d\theta.$$

La solution est donnée par

$$(1) \qquad u = \overline{u}_0 - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad v = \overline{v}_0 - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad p = \frac{\partial P}{\partial t},$$

P étant harmonique et Φ une solution de l'équation (C) de la chaleur qui

---

([1]) SANIÉLÉVICI, *Thèse* (*Ann. de l'Éc. Norm.*, 1909, p. 142).

s'annule pour $t=0$; P et Φ vérifiant de plus

$$\frac{dP}{dn_{1M_1}}+\frac{d\Phi}{d\sigma_M}=(V_{e_n})_t^0,\qquad \frac{dP}{d\sigma_{1M_1}}-\frac{d\Phi}{dn_M}=(V_{e_\sigma})_t^0. \tag{2}$$

Soit

$$p=\left(d''\log\frac{1}{\delta}\right),$$

$$\Phi=\int_0^t(\omega''U)\,d\theta,\qquad \text{où}\quad U=\frac{-1}{\pi\tau}\,\frac{d}{dn_Q}\left(e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}\right)\quad \text{avec } \omega_0=0. \tag{3}$$

Les équations (2) dérivées par rapport à t donnent deux équations intégrales en $d(M, t)$ et $\omega'_t=m(M, t)$:

$$\left\{\begin{aligned} &\pi d+\left(\frac{\cos\psi''}{\delta}\,d\right)+\int_0^t(H''_1 d-N''_1 m)\,d\theta=\frac{\partial V_{en}}{\partial t},\\ &-\frac{2\gamma}{f}\,m+\left(\frac{\sin\psi''}{\delta}\,d\right)+\int_0^t(H''_2 d-N''_2 m)\,d\theta=\frac{\partial V_{e\sigma}}{\partial t},\end{aligned}\right. \tag{4}$$

où γ est la courbure en M à σ et où

$$N_1=\frac{1}{\pi}\,\frac{dU}{d\sigma_M},\qquad N_2=\frac{-1}{\pi}\,\frac{dU}{dn_M},$$

$$H_1=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{d}{dn_{1M_1}}\log\frac{1}{\delta_1}\right),\qquad H_2=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{d}{d\sigma_{1M_1}}\log\frac{1}{\delta_1}\right).$$

D'après (4) p s'annule à l'infini comme $\frac{1}{\rho^2}$ et s'il en est de même pour V_0, on peut négliger T.

III. Le système de Volterra (4) se résout par approximations successives. Il y a superposition des petits mouvements; lorsque σ est en translation rectiligne de vitesse $\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon_0=0$, les fonctions d et m sont chacune de la forme $a'\varepsilon'+(b'\varepsilon')$, a étant fonction de M et b de M et de τ. Il en est de même pour p, Φ, $u-\overline{u}_0$, $v-\overline{v}_0$ et il y a hérédité vérifiant le Principe du Cycle fermé. Les noyaux de (4) sont bornés et s'il en est de même pour ε, les séries définissant d et m sont absolument et uniformément convergentes. Pour un torseur $R(\varepsilon, \eta, r)$ quelconque, les composantes du dyname des efforts sont chacune de la forme $a_1\varepsilon'+a_2\eta'+a_3r'+(b'_1\varepsilon')+(b'_2\eta')+(b'_3r')$ où a_1, a_2, a_3 sont des constantes et b_1, b_2, b_3 des fonctions de τ. Si σ est soumis à la seule action du liquide, les équations du mouvement forment un système linéaire de deuxième espèce de Volterra en ε', η', r', à noyaux fonctions de τ.

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Les expériences de réflexion optique et la dissymétrie de l'espace.* Note de M. **Ernest Esclangon**, présentée par M. Deslandres.

L'étude de la réflexion optique et de ses variations, en fonction de la direction des rayons lumineux par rapport à la sphère céleste étoilée, présente l'avantage de conduire à des résultats expérimentaux à conclusion directe, sans interprétation théorique interposée comme peut l'être celle provenant de l'application consécutive de la théorie ondulatoire de Fresnel.

Dans une Note, publiée en 1915, intitulée : *Sur les lois de la réflexion et leur vérification expérimentale* (1), je posais la question en ces termes : « Or, vis-à-vis des lois géométriques si simples de la réflexion, si universellement regardées comme extraordinairement approchées, on peut se poser aujourd'hui la question : sont-elles toujours hors de la portée de nos moyens expérimentaux ; leur degré d'approximation demeure-t-il au-dessus de la précision de nos instruments actuels de mesure. Rien ne saurait répondre à cela que l'expérience qui, si elle était positive, pourrait conduire à de précieux enseignements, sinon à quelque importante découverte. Qui pourrait affirmer, *a priori*, si le degré d'approximation de ces lois entrait vraiment dans le domaine expérimental, qu'il ne dépendrait pas du mouvement de l'observateur par rapport à l'éther et ne *serait pas variable avec l'orientation des rayons?* Ce pourrait être, dans une autre voie, une nouvelle tentative, après tant d'autres, pour mettre en évidence le mouvement de la Terre par rapport à l'éther et conduire en quelque sorte à la définition physique de l'espace et du mouvement absolus. » J'indiquais dans cette Note une méthode expérimentale mettant en œuvre la précision des grands instruments d'astronomie, basée sur la réflexion sur bain de mercure avec complète élimination des erreurs de division des cercles gradués astronomiques. Les nécessités de la guerre empêchèrent à ce moment l'exécution des expériences.

Le cours de ces idées fut repris à mon arrivée à l'Observatoire de Strasbourg où je fis exécuter, dans ce but à partir de 1920 (2), des observations

(1) *Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques de Bordeaux*, 11 mars 1915.

(2) *Rapports sur les observatoires astronomiques de province*, 1920, 1921, 1922.

Depuis longtemps, à Greenwich notamment, on avait paru remarquer une sorte d'écart systématique entre les observations d'étoiles directes et réfléchies. En 1926

méridiennes d'étoiles directement et par réflexion sur bain de mercure. La méthode suivante fut également mise à l'épreuve. Devant l'objectif de l'altazimut fut *fixé* un prisme isoscèle construit spécialement à cet effet, la base étant parallèle à l'axe optique, l'arête opposée lui étant perpendiculaire. Des rayons venant d'un collimateur, parallèlement à l'axe optique, traversent le prisme en subissant sur sa base la *réflexion* totale et sortent parallèlement à l'axe, parallèlement aussi aux rayons du faisceau n'ayant pas traversé le prisme. Les deux images obtenues, très voisines, étaient confrontées dans le plan focal en faisant varier la direction de la lunette.

Ces diverses expériences donnèrent des résultats que j'estimai peu concluants; la précision de l'ordre d'une fraction de seconde était insuffisante. Je me propose d'indiquer dans cette Note les conditions nécessaires, sinon suffisantes, pour la réussite d'expériences de ce genre. Il ressort de résultats que j'ai obtenus en 1926, 1927 [1] que les effets à espérer sont de quelques centièmes de seconde d'arc. Sur des appareils *fixes*, même dans la cave la plus profonde, les mouvements du sol ou les fluctuations des instruments engendrent des écarts 20 fois plus grands que les effets cherchés, si l'expérience comparative dure plus d'une demi-heure; si, au contraire, elle ne dure que très peu de temps, une minute par exemple, les fluctuations restent de l'ordre de $\frac{1}{100}$ de seconde. De ces considérations découle le principe que nous posons vis-à vis de toutes les expériences de réflexion optique de la nature indiquée :

L'appareil dans son ensemble comprenant lunette, miroirs, collimateurs s'il y a lieu, etc. doit constituer un bloc unique très rigide et bien calorifugé [2], le chemin des rayons ne comportant aucun parcours à l'air libre.

(*Astronomische Nachrichten*, n° 226), Courvoisier, admettant comme *effective* la contraction lorentzienne de la Terre sous l'effet de la vitesse, indépendamment du principe de relativité, a interprété, d'après cette hypothèse, qu'il n'y a pas lieu de discuter ici les résultats d'observations nadirales et d'observations d'étoiles directes et réfléchies, faites à Babelsberg et à Leyde. Il en déduit ainsi certaines valeurs pour les coordonnées de l'apex du mouvement absolu de la Terre. L'objection qu'on peut faire, indépendamment de celle relative à la légitimité de l'hypothèse indiquée, est que les observations ne paraissent pas suffisamment indépendantes des *fluctuations instrumentales* et aussi des variations diurnes solaires que la trop faible durée de beaucoup de ces expériences ne permet pas de séparer nettement des variations éventuelles de période sidérale.

(1) *Comptes rendus*, 185, 1927, p. 1593, et *Journal des Observateurs*, 15 avril 1928.

(2) Si l'appareil est bien calorifugé dans son entier, les variations thermiques de la salle, supposée bien close, sont impuissantes à se faire sentir dans l'intervalle de une

Il doit permettre le sondage comparatif de deux directions de l'espace en moins de *deux minutes;* mais l'opération peut et doit être renouvelée un grand nombre de fois. Comme les effets de flexion, si l'on changeait l'inclinaison, pourraient être 50 fois supérieurs à l'effet cherché, l'appareil tout entier doit seulement tourner, pour les sondages, avec précision et douceur (sans être manié directement) autour d'un axe exactement vertical.

La méthode exclut de ce fait l'emploi du bain de mercure en tant que surface réfléchissante, laquelle, par surcroît, ne se prête pas à des pointés d'une précision extrêmement élevée. C'est ce principe général, éliminant à la fois les fluctuations instrumentales et les variations diurnes, que nous avons suivi dans nos expériences d'auto-collimation. Hors de ces conditions, il paraît bien difficile d'obtenir des résultats qui ne soient pas illusoires.

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. — *Sur les études limnologiques dans les Pyrénées françaises.* Note de M. **Ludovic Gaurier**, présentée par M. P. Helbronner.

Si les Pyrénées ne possèdent point de vastes lacs comparables à ceux des Alpes, elles offrent de très nombreuses petites cuvettes, souvent profondes, situées sur les plus élevés des paliers successifs qui caractérisent la plupart des vallées de cette chaîne. Ces lacs se trouvent donc dans des conditions favorables pour être transformés en réservoirs pour le service des usines hydro-électriques ou pour celui des irrigations.

Il y a un demi-siècle que le service des Ponts et Chaussées procéda à l'aménagement d'un premier groupe de lacs, en vue de régulariser le cours de la Neste, afin que cette rivière pût fournir aux quinze cours d'eau du plateau de Lannemezan le débit minimum nécessaire aux besoins de l'agriculture, durant l'été. Le captage de quelques lacs dans le massif du Néouvieille, puis celui du lac de Caillaouas fournirent une réserve de 26 millions de mètres cubes. Le barrage récent de la vallée de l'Oule vient encore d'augmenter notablement cette réserve de houille blanche.

à deux minutes. A ce point de vue, il est presque indifférent d'observer dans une coupole fermée ou dans une cave. Les variations de température résultant de la présence de l'observateur sont davantage à redouter, et des précautions spéciales doivent être prises à cet effet.

Mais en dehors des études nécessaires à l'aménagement de la Neste on n'avait guère fait, aux Pyrénées, que des observations sporadiques sur la capacité et les conditions géologiques des lacs. Émile Belloc consacra plusieurs étés, vers 1890, aux lacs des environs de Luchon. Vers la même époque, M. Delebecque sonda également les cuvettes les plus grandes ou les plus connues de notre chaîne.

En 1907, j'ai entrepris l'étude systématique de tous les lacs, petits et grands, du versant français des Pyrénées. Dès 1910, le Ministère de l'Agriculture me confia le soin de poursuivre ce travail pour lui. Après les quatre années de guerre qui interrompirent forcément cette mission, les demandes de concessions d'énergie hydraulique se multiplièrent tellement que le Ministère des Travaux publics se mit d'accord avec celui de l'Agriculture pour me fournir le moyen de hâter, autant que possible, l'achèvement de l'atlas des lacs pyrénéens.

Mais on sait combien les travaux de topographie sont longs en montagne, où le terrain n'est accessible que durant quelques semaines par an. L'éloignement des lieux habités complique encore la tâche, en obligeant à transporter, souvent à dos d'homme, le matériel de campement, les vivres, les instruments et le bateau indispensable pour les sondages. Néanmoins le travail est assez avancé pour que l'on puisse constituer dès maintenant un premier atlas contenant la carte bathymétrique de *deux cent dix lacs*.

Toutes ces cartes sont levées à grande échelle : au $\frac{1}{1000}$ ou au $\frac{1}{2000}$, ce qui permet d'y inscrire les cotes des sondages. La carte est exécutée sur le terrain, au moyen de la planchette déclinée et de l'éclimètre. Les sondages sont exécutés au moyen du sondeur Belloc, à fil d'acier, muni d'un compteur qui donne une précision de l'ordre du centimètre. L'allure du fond du lac est déterminée par une série de profils en travers assez serrés pour qu'aucun détail important du relief immergé n'échappe à l'observation. Le niveau de chaque lac étant sujet à des variations, les cotes des sondages sont toujours rattachées à un repère du nivellement général fixé sur la rive, soit par le service du nivellement général de la France, soit par nos soins, en attendant qu'une brigade de ce service vienne en déterminer l'altitude précise.

Quand le séjour de la mission est assez long, ces oscillations du niveau des eaux sont soigneusement mesurées, pour déterminer leur corrélation avec la fonte graduelle des névés du bassin d'alimentation et avec la quantité de pluie tombée pendant la durée des opérations.

La géologie du sol encaissant, la faune et la flore de chaque lac font également l'objet d'une petite étude : ce qui permettra de joindre à l'atlas des lacs des Pyrénées un commentaire détaillé de chaque carte.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Le champ photonique et la généralisation relativiste de la mécanique ondulatoire de Dirac.* Note (¹) de M. **Th. De Donder**, présentée par M. Marcel Brillouin.

Considérons un système matériel en mouvement; on connaît les équations électromagnétiques (²) régissant un tel système. Nous nous placerons ici dans le cas (³) où il existe un potentiel électromagnétique $\Phi_\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$.

Aux équations électromagnétiques, il convient de joindre les équations

$$(1)\qquad \frac{\partial \mathfrak{U}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mathfrak{C}^\mu, \qquad \frac{\partial \mathfrak{U}^{\mu\nu}_{*}}{\partial x^\nu} = \mathfrak{C}^\mu_{*},$$

qui régissent *le champ photonique* (⁴). Le tenseur symétrique gauche $\mathfrak{U}^{\mu\nu}_{*}$ est *la dualistique* du tenseur $\mathfrak{U}^{\mu\nu}$; autrement dit

$$(2)\qquad \mathfrak{U}^{\mu\nu}_{*} = U_{\bar{\mu}\bar{\nu}},$$

où les quatre nombres $\mu, \nu, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ forment une permutation paire de 0, 1, 2, 3. Rappelons qu'une lettre *de ronde* (ou tensorielle) divisée par $\sqrt{-g}$ devient une lettre *droite*; ainsi $\mathfrak{U}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, U^{\mu\nu}$; $\mathfrak{U}^{\mu\nu}_{*} = \sqrt{-g}\, U^{\mu\nu}_{*}$. On aura, en outre,

$$(3)\qquad \mathfrak{U}^{*}_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \mathfrak{U}^{\mu\nu}_{*}, \qquad U^{*}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} U_{\bar{\mu}\bar{\nu}}.$$

Dans les équations photoniques (1), les vecteurs contravariants $\mathfrak{C}^\mu$ et $\mathfrak{C}^\mu_{*}$ représentent les courants photoniques. J'ai montré (⁴) qu'il y avait lieu d'établir un lien entre le champ photonique et le champ électromagnétique ;

(¹) Séance du 2 janvier 1929.

(²) Voir les équations (324) et (325) (p. 54) de ma *Théorie des champs gravifiques* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XIV, Paris, 1926).

(³) Voir les équations (329) et (330) de la *Théorie* susmentionnée.

(⁴) Th. De Donder, *Le champ photonique* (*Ac. Roy. de Belgique, Bull. de la Cl. des Sciences*, 5ᵉ série, 14, séance du 2 juin 1928, p. 307-312).

nous poserons ici, avec J.-M. Whittaker ([1]) :

$$(4)\qquad \mathcal{C}^{\mu} = \zeta_{\nu}\mathfrak{U}^{\mu\nu} - \zeta^{\mu}\mathfrak{S} + \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}} - \varkappa\mathfrak{T}^{\mu},$$

$$(5)\qquad \mathcal{C}^{\mu}_{\star} = -\zeta_{\nu}\mathfrak{U}^{\mu\nu}_{\star} + \zeta^{\mu}\mathfrak{B} - \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial x^{\nu}} - \varkappa\mathfrak{Q}^{\mu}.$$

Rappelons que $\mathfrak{S} = \sqrt{-g}\,S$; $\mathfrak{B} = \sqrt{-g}\,B$. Les ζ_{ν} représentent, à un facteur constant près $\frac{2\pi i e c}{h}$, les potentiels covariants Φ_{ν}. Enfin, nous avons posé $\varkappa = \frac{2i\pi}{h}mc^2$.

M. J.-M. Whittaker ([1]) a exprimé les $\mathfrak{U}^{\mu\nu}$, $\mathfrak{U}^{\mu\nu}_{\star}$, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{B}$ qui figurent dans (1), (4) et (5) au moyen des potentiels électromagnétiques ζ_{ν} (ou Φ_{ν}) et des potentiels *ondulatoires* $\mathfrak{T}^{\nu}$ et $\mathfrak{Q}^{\nu}$. En utilisant les dualistiques, les équations (ondulatoires) de J.-M. Whittaker pourront s'écrire

$$(6)\qquad \varkappa U_{\mu\nu} = (P_{\mu\nu} + A_{\mu\nu}) + (Q^{\star}_{\mu\nu} + B^{\star}_{\mu\nu}).$$

$$(7)\qquad \varkappa U^{\star}_{\mu\nu} = (P^{\star}_{\mu\nu} + A^{\star}_{\mu\nu}) - (Q_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}).$$

$$(8)\qquad \varkappa\mathfrak{S} = \frac{\partial\mathfrak{T}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \zeta_{\mu}\mathfrak{T}^{\mu}.$$

$$(9)\qquad \varkappa\mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{Q}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \zeta_{\mu}\mathfrak{Q}^{\mu}.$$

Nous avons posé

$$(10)\qquad P_{\mu\nu} = \frac{\partial P_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial P_{\mu}}{\partial x^{\nu}}; \qquad A_{\mu\nu} = \zeta_{\nu}P_{\mu} - \zeta_{\mu}P_{\nu},$$

$$(11)\qquad Q_{\mu\nu} = \frac{\partial Q_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial Q_{\mu}}{\partial x^{\nu}}; \qquad B_{\mu\nu} = \zeta_{\nu}Q_{\mu} - \zeta_{\mu}Q_{\nu}.$$

Dans les équations (6) et (7), les petites croix obliques qui figurent dans $U^{\star}_{\mu\nu}$, $P^{\star}_{\mu\nu}$, $Q^{\star}_{\mu\nu}$, $A^{\star}_{\mu\nu}$, $B^{\star}_{\mu\nu}$ indiquent qu'il faut prendre *la dualistique* des tenseurs qui en sont affectés ; la signification de cette opération est donnée par (2) ainsi que (3).

Pour obtenir *la généralisation relativiste de la mécanique ondulatoire de Dirac* étendue aux systèmes *matériels en mouvement*, il ne reste plus qu'à

([1]) J.-M. WHITTAKER, *On the Principle of Least Action in Wave Mechanics* (*Proceedings of the Royal Society*, Serie A, **121**, n° A. 788 ; 3 décembre 1928, London, p. 543-557). Voir spécialement les équations (24) et (25). (Nous adoptons ici les notations de M. J.-M. Whittaker.)

substituer (¹) les $U_{\mu\nu}$, $U^*_{\mu\nu}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}$ données par les équations ondulatoires (6) à (9), dans les équations photoniques (1), (4) et (5).

Dans un autre travail, nous montrerons comment on peut, grâce à la gravifique einsteinienne, étendre à ces systèmes matériels en mouvement le principe de correspondance.

ÉLECTRONIQUE. — *Expériences sur la polarisation des ondes électroniques.* Note (²) de M. **A. F. Joffé** et **A. N. Arsénieva**, présentée par M. Jean Perrin.

M. Davisson et une série d'autres physiciens ont démontré l'existence des phénomènes périodiques qui accompagnent les mouvements des électrons. Ils ont déterminé les longueurs d'onde en question avec précision et en bon accord avec les suppositions faites par MM. L. de Broglie et Schroedinger.

Il est donc devenu nécessaire d'entreprendre des études expérimentales sur les propriétés des ondes électroniques et les limites de leurs analogies avec les ondes électromagnétiques.

Au printemps et en automne de l'année courante nous avons fait une série d'expériences ayant pour but de découvrir la polarisation des électrons, si elle existe en effet. L'expérience se présentait comme il suit :

Un étroit faisceau incident d'électrons rencontrait un miroir sous un angle φ. Parmi les électrons diffusés dans toutes les directions on dégageait au moyen de deux diaphragmes un faisceau étroit réfléchi sous le même angle φ. Le faisceau incident rencontrait ensuite sous le même angle un second miroir qui tournait avec les deux diaphragmes autour d'un axe coïncidant avec le faisceau réfléchi. Parmi les électrons diffusés par le second miroir on dégageait un faisceau, sous l'angle φ, attrapé par un collecteur de Faraday relié à un électromètre.

Dans le cas de la lumière ou des rayons de Röntgen, les expériences analogues donnent des maxima de lumière alternativement, à chaque 90° de rotation du second miroir.

(¹) Dans le cas des systèmes purement électroniques de Maxwell-Lorentz, on obtiendra ainsi les équations quantiques (28) et (32) de J.-M. Whittaker [voir son Mémoire cité page 151, note (¹)].

(²) Séance du 26 décembre 1928.

Dans le cas des électrons un pareil effet ne s'est pas manifesté, étant données les limites de précision de l'expérience à 1 pour 100 environ. Au lieu de cela, un effet est souvent observé où les intervalles entre les minima et les maxima comprennent 180°. Ces effets se produisent facilement sous l'influence du champ magnétique terrestre (lorsqu'il s'agit des électrons lents), ainsi que par l'asymétrie minime de l'appareil lui-même.

Il fut donc nécessaire de construire l'appareil avec une grande précision, pour éviter l'apparition de cet effet.

L'angle φ a eu les valeurs 10° et 30°.

Les miroirs étaient faits en acier, laiton et verre.

Les vitesses des électrons variaient de 80 à 6400 volts.

On mesurait la quantité totale des électrons diffusés, ou bien on dégageait de lents électrons secondaires par le champ électrique inverse.

Sous ces rapports nos expériences complètent et confirment les résultats récemment publiés par MM. Davisson et Germer (¹) qui ont obtenu le même résultat pour les vitesses de 20 à 120 volts, à la diffusion des électrons par un monocristal de nickel.

Le champ magnétique dans nos expériences fut compensé par trois grandes bobines mutuellement perpendiculaires.

Un champ magnétique le long du faisceau d'électrons, parallèlement au plan des miroirs réflecteurs, ou bien perpendiculairement à ce plan, n'a produit aucune influence sur le coefficient de diffusion des électrons.

Notre résultat négatif concernant la polarisation soit par réflexion, soit par le champ magnétique est en accord parfait avec la théorie ondulatoire de la matière développée par MM. C.-G. Darwin et J.-I. Frenkel dont la Note suit.

ÉLECTRONIQUE. — *Sur l'impossibilité de polariser les ondes cathodiques par réflexion.* Note (²) de M. **J. Frenkel**, présentée par M. Jean Perrin.

Les équations de Dirac pour les ondes de L. de Broglie, qui correspondent au mouvement d'un électron, peuvent être mises sous une forme analogue

(¹) C. J. Davisson and L. H. Germer, *An attempt to polarise Electron Waves by Reflection* (*Nature*, **122**, 1928, p. 809).

(²) Séance du 26 décembre 1928.

à celle des équations de Maxwell pour les ondes électromagnétiques ([1]). Ce fait semblait impliquer la possibilité d'une polarisation des ondes électroniques par réflexion sur une surface métallique. Un raisonnement simple montre que cette conclusion est fausse, conformément aux résultats négatifs des expériences de M. A. Joffé et de M. Davisson.

La polarisation des ondes lumineuses, réfléchies sur la surface d'un corps diélectrique, est due au saut brusque du pouvoir inducteur spécifique ε, lié dans ce cas à l'indice de réfraction n par la formule de Maxwell $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Mais ε doit être défini par la formule $\sqrt{\varepsilon} = \frac{V}{V'}$ où $V = 3.10^{10}$ est la vitesse *véritable* des ondes lumineuses élémentaires, tandis que V' désigne la vitesse de propagation du phénomène complexe résultant de la superposition des ondes primaires et des ondes secondaires émises par les atomes. Cette vitesse « apparente » V' ainsi que la vitesse véritable V se rapportent donc dans la formule précédente *au même milieu*.

Or pour les ondes électroniques il n'y a qu'*une* sorte de vitesse de phase *qui est leur vitesse véritable*. Un milieu matériel se comporte par rapport aux ondes électroniques comme un vide à potentiel électrique différent de celui du vide ambiant. On a donc dans ce cas $\varepsilon = 1$ bien que $n \neq 1$; les conditions de continuité à la surface d'un corps pour les vecteurs électroniques $\vec{N}$ et $\vec{M}$, ainsi que pour les scalaires associés M_0 et N_0, se réduisent donc à la continuité de toutes les composantes.

En introduisant les fonctions de Dirac

$$\Psi_1 = M_x + iM_y, \qquad \Psi_2 = M_z + iM_0; \qquad \Psi_3 = iN_x - N_y, \qquad \Psi_4 = iN_z - N_0,$$

on a, pour une onde plane, se propageant normalement à l'axe z,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_1 + \frac{1}{c}(W - U - mc^2)\Psi_4 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_2 + \frac{1}{c}(W - U - mc^2)\Psi_3 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_3 + \frac{1}{c}(W - U + mc^2)\Psi_2 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_4 + \frac{1}{c}(W - U + mc^2)\Psi_1 = 0,$$

W étant l'énergie totale et m la masse (au repos) de l'électron. Nous

([1]) Voir C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc.*, **118**, 1928, p. 654; J. Frenkel, *Zts. f. Phys.*, **47**, 1928, p. 799.

supposerons l'énergie potentielle U nulle dans le vide ($x < 0$) et constante (négative) dans le métal ($x > 0$). En posant

$$\Psi_\alpha = a_\alpha e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} + b_\alpha e^{i(-k_x x + k_y y - \omega t)} \qquad (x < 0),$$

$$\Psi'_\alpha = a'_\alpha e^{i(k'_x x + k'_y y - \omega t)} \qquad (x > 0).$$

et $\Psi_\alpha = \Psi'_\alpha$ pour $x = 0$, on trouve la loi de réfraction (sous la forme $k'_y = k_y$) et les relations suivantes entre les amplitudes des ondes incidentes (a) et des ondes réfléchies (b) :

$$a_1 = -\frac{k_x - ik_y}{\mu} a_4, \qquad a_2 = -\frac{k_x + ik_y}{\mu} a_3,$$

$$b_1 = +\frac{k_x + ik_y}{\mu} b_4, \qquad b_2 = +\frac{k_x - ik_y}{\mu} b_3,$$

$$\frac{b_3}{a_3} = \frac{\sigma + i\tau}{\rho - i\tau}, \qquad \frac{b_4}{a_4} = \frac{\sigma - i\tau}{\rho + i\tau},$$

avec les abréviations suivantes

$$\rho = 1 + \frac{\mu}{\mu'}\frac{k'_x}{k_x}, \qquad \sigma = 1 - \frac{\mu}{\mu'}\frac{k'_x}{k_x}, \qquad \tau = \left(\frac{\mu}{\mu'} - 1\right)\frac{k_y}{k_x},$$

$$\mu = \frac{W - U + mc^2}{hc}, \qquad \mu' = \frac{W - U' + mc^2}{hc} \qquad (U = 0,\ U' < 0).$$

Les composantes de la densité du courant électrique mesurant l'intensité des ondes électroniques incidentes sont

$$J_x = -ce(a_1 a_4^* + a_1^* a_4 + a_3 a_2^* + a_3^* a_2) = \frac{2k_x}{\mu}(a_3 a_3^* + a_4 a_4^*).ce,$$

$$J_y = ice(+a_1 a_4^* - a_1^* a_4 + a_3 a_2^* - a_3^* a_2) = \frac{2k_y}{\mu}(a_3 a_3^* + a_4 a_4^*).ce,$$

et l'on a des expressions analogues pour les ondes réfléchies. On trouve donc pour le rapport des deux courants ($J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2}$), c'est-à-dire pour le coefficient de réflexion R, la formule

$$R = \frac{|b_3|^2 + |b_4|^2}{|a_3|^2 + |a_4|^2} = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\rho^2 + \tau^2}.$$

Le fait, que les composantes a_α n'interviennent pas dans l'expression de R, montre qu'il n'y a pas d'effet correspondant à la polarisation des ondes lumineuses.

Il est intéressant de remarquer que la différence entre l'expression précédente et celle que l'on obtient à partir de l'équation de Schrödinger est de l'ordre $\frac{1}{c^2}$ (correction relativiste).

ÉLECTRICITÉ. — *Sur les propriétés des gaz ionisés dans les champs de haute fréquence.* Note de M. **Henri Gutton**, présentée par M. G. Ferrié.

Des recherches sur les propriétés des gaz ionisés ([1]) nous ont déjà conduit à admettre l'existence d'une période propre d'oscillation des ions, nous avons repris des expériences du même genre en vue de rechercher comment la force élastique varie avec la conductibilité du gaz.

Un tube vertical de 45^{mm} de diamètre et de 330^{mm} de longueur est vidé par une pompe à diffusion et contient de l'hydrogène d'un osmorégulateur Villard à une pression de 0^{mm},0003. Le gaz est ionisé en y faisant passer des décharges, on les obtient en réunissant deux anneaux de papier d'étain, collés aux extrémités du tube, à une bobine le long de laquelle un oscillateur de longueur d'onde 88^{m} induit une force électromotrice périodique. Au milieu du tube et aux deux extrémités d'un diamètre horizontal sont scellés dans la paroi deux fils de platine de 0^{mm},2 de diamètre, pénétrant de 7^{mm} à l'intérieur, les extrémités de ces fils sont à une distance de 31^{mm}. On mesure la conductibilité du gaz entre ces deux électrodes en les reliant à un galvanomètre et à deux éléments d'accumulateur (4^{v},12). Sur le diamètre horizontal perpendiculaire sont disposées extérieurement au tube et à une distance de 81^{mm} deux petites plaques de cuivre (22 × 10^{mm}), reliées respectivement aux deux fils d'une ligne. Sur cette ligne peut se déplacer un pont sur lequel est intercalée une soudure thermo-électrique reliée à un second galvanomètre sensible. La ligne est faiblement couplée à un oscillateur Mesny à onde très courte.

Le gaz n'étant pas ionisé, nous déterminons d'abord la distance du pont à l'extrémité de la ligne pour laquelle celle-ci est accordée. Pour des ionisations croissantes du gaz, nous cherchons la nouvelle position d'accord du pont. Nous mesurons la longueur de ligne l qui correspond à cet accord, la conductibilité du gaz par le courant i dans le premier galvanomètre. La déviation D du second nous donne l'intensité du courant de résonance et renseigne sur l'amortissement des oscillations de la ligne provoqué par l'ionisation du gaz.

Nous avons fait quatre séries d'essais pour quatre longueurs d'onde. Le tableau suivant indique les résultats obtenus pour l'onde de 1^{m},834 :

([1]) *Comptes rendus*, 184, 1927, p. 441 et 676.

l = 342 mm	i = 0 micro A	D = 510
344	1,03	320
351	1,58	262
363	1,82	60
379	1,96	17
324	2,07	25
310	2,11	28
315	2,32	33
322	2,82	90
331	3,88	337
335	7,92	423

En représentant les variations de l en fonction de i nous obtenons une courbe identique à une courbe de dispersion au voisinage d'une bande d'absorption.

La constitution d'un gaz ionisé présente beaucoup d'analogie avec celle du diélectrique de Lorentz, les distances entre électrons étant toutefois beaucoup plus considérables. C'est en admettant l'existence d'une force élastique agissant sur les ions que Lorentz explique les bandes d'absorption, il est naturel d'admettre que dans nos expériences l'existence d'une bande d'absorption est aussi due à une résonance entre les oscillations des électrons et les oscillations du champ.

Les mesures nous ont donné les valeurs de la conductibilité du gaz qui, pour quatre longueurs d'onde, correspondent à une résonance :

λ = 4830 mm	i = 0,16 micro A	$\lambda^2 i^{0,75}$ = 5,9
2528	0,88	5,8
1834	2,04	5,7
1324	5,21	6,0

La résonance se produit lorsque la force d'inertie, en raison inverse du carré de la longueur d'onde, est égale à la force élastique pour l'écart unité. Les nombres du tableau montrent que le produit $\lambda^2 i^{0,75}$ est constant; la conductibilité étant proportionnelle au nombre d'ions par centimètre carré, la force élastique est proportionnelle à la puissance 0,75 du nombre d'ions.

Lors de la propagation des ondes radiotélégraphiques dans la haute atmosphère, la couche dont l'ionisation correspond à la résonance provoque une réflexion analogue à la réflexion métallique. Cette couche est d'autant plus ionisée et par suite d'autant plus élevée que la longueur d'onde est plus courte. Le faisceau réfléchi est dépolarisé et la réflexion peut se faire sous toute incidence, mais avec des intensités qui dépendent de cette incidence et de l'orientation du plan de polarisation.

ÉLECTROMAGNÉTISME. — *Sur l'effet de concentration et de dilatation périodiques produit par un champ magnétique longitudinal sur un faisceau d'électrons lents.* Note ([1]) de M. **Jean Thibaud**, présentée par M. M. de Broglie.

1. On a depuis longtemps remarqué qu'une petite bobine, parcourue par un courant continu et traversée suivant son axe par un faisceau de rayons cathodiques, a la propriété de concentrer ce faisceau. La théorie de cet effet, utilisé dans quelques oscillographes cathodiques, a été donnée par H. Busch ([2]). Cette propriété n'est qu'un cas particulier d'un phénomène plus général, non seulement de concentration mais également de dilatation du faisceau, que nous avons décrit dans une Note précédente. En utilisant des électrons suffisamment lents, on peut suivre, lorsque le champ magnétique de la bobine croît, une succession d'états de concentration et de dilatation d'un faisceau d'électrons produit par un filament incandescent. L'explication de ce phénomène peut être donnée, d'une manière classique, comme dans les effets magnéto-cathodiques de Gouy. Soit un électron de vitesse $v = \beta c$ traversant la région de champ magnétique H uniforme à l'intérieur d'une longue bobine; à un certain moment il coupe l'axe de la bobine sous un angle α très petit et décrit, en s'enroulant sur un tube de force du champ, une hélice de très petit diamètre r. Au bout du temps τ il se retrouve sur l'axe ayant avancé d'une longueur l, égale au pas :

$$r = \frac{v \sin\alpha}{\frac{e}{m} \mathrm{H}}, \qquad \tau = \frac{2\pi}{\frac{e}{m} \mathrm{H}}, \qquad l = v \cos\alpha \frac{2\pi}{\frac{e}{m} \mathrm{H}}.$$

Comme α est très petit (pinceau d'électrons peu divergent), tous les électrons compris dans le cône d'angle solide 2α se retrouveront sur l'axe, après le trajet l : il y a formation, le long de l'axe de la bobine de véritables *foyers* (régions nodales), espacés de l, et séparés par des zones (régions ventrales), à densité électronique plus faible, où le faisceau s'élargit (diamètre maximum $4r$).

Considérons maintenant, à la sortie de la bobine, la portion de l'axe où le champ cesse d'être uniforme. Si le champ H_c de la bobine est tel qu'un foyer est, dans cette région, sur le point de se former, le faisceau est convergent. La non-uniformité du champ reporte la formation du foyer plus loin et celui-ci rencontrant des champs de plus en plus faibles se

---

([1]) Séance du 2 janvier 1929.

([2]) H. Busch, *Archiv f. Elektrot.*, 18, 1927, p. 583.

déplace, en quelque sorte, le long de la trajectoire, donnant au faisceau son aspect concentré et filiforme. Si, au contraire, c'est une région ventrale du faisceau qui se présente à la sortie de la bobine, le faisceau étant divergent, la pénétration dans des régions de champ décroissant ne peut qu'accroître la divergence : il y a alors dilatation du faisceau. La périodicité du phénomène est liée, lorsque H croît, à la formation d'un nouveau foyer dans la région de champ uniforme, de longueur L, à l'intérieur de la bobine. Les phénomènes reprennent le même aspect pour chaque valeur du pas d'enroulement l qui se trouve être un sous-multiple de la longueur L :

$$L = nl = k' \frac{\beta}{H} \times n,$$

de sorte que les valeurs des champs H_c de concentration (et H_d de dilatation) s'exprime par

$$H_c = k' n \beta, \qquad H_d = k'\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta, \qquad k' = \frac{2\pi}{\frac{e}{m} L} \times c.$$

Ces formules sont de même forme que les formules empiriques données dans la Note précédente. La valeur numérique calculée pour le coefficient k' ($k' = 10650$) est en accord étroit avec le coefficient angulaire des courbes expérimentales.

Nous avons pu mettre en évidence expérimentalement, dans le cas des champs élevés, la formation du foyer en dehors de la bobine. Pour des électrons lents, le faisceau excitant la fluorescence des molécules rencontrées présente un grand éclat et l'on observe, en un point de son parcours, un foyer que l'on peut allonger ou raccourcir en modifiant le champ.

2. Il est curieux de noter l'analogie qui existe entre ces phénomènes de dilatation et de concentration, en fonction du champ, d'un faisceau d'électrons traversant une bobine sur une partie de leur parcours et la propagation d'un faisceau lumineux au travers d'une lentille. La bobine se comporte, vis-à-vis de la trajectoire des électrons, comme une lentille dont la convergence varierait d'une manière continue (par variation de l'indice de réfraction ou des courbures des faces terminales, par exemple). On pourrait imaginer tel système optique à convergence variant périodiquement en fonction d'une certaine grandeur, jouant ici le rôle du champ magnétique dans notre expérience sur les électrons. L'effet magnétique longitudinal est un exemple de cette analogie existant entre la trajectoire d'un corpuscule et celle d'un rayon lumineux qui constitue le point de départ de la nouvelle mécanique ondulatoire.

Il ne semble pas, d'autre part, que notre effet puisse être influencé par un état magnétique de l'électron. Si celui-ci possède un moment magnétique, de l'ordre de grandeur prévu par les théories récentes et s'il y a orientation quantique des électrons, lors de leur passage dans la bobine, ce moment est beaucoup trop petit pour donner lieu, dans les champs magnétiques que nous utilisons, à des modifications appréciables des trajectoires électroniques.

SPECTROSCOPIE. — *Intercombinaisons et termes nouveaux dans le spectre d'étincelle du soufre* S II. Note de MM. **Léon** et **Eugène Bloch**, présentée par M. Brillouin.

Nous avons déjà fait connaître sommairement [1] le résultat de nos recherches sur le spectre du soufre entre 7100 et 2200 Å, recherches faites suivant la méthode de la décharge oscillante dans un tube sans électrodes. Le spectre S II, que cette méthode a permis d'isoler du spectre S III, comporte un très grand nombre de raies nouvelles, même dans les régions déjà explorées. Nous avions donc les éléments nécessaires pour étendre assez notablement les résultats acquis touchant la structure de ce spectre.

Le spectre S II a été analysé par Ingram [2], qui a reconnu deux sortes de termes, à savoir un système de quadruplets et deux systèmes de doublets. Quelques-uns des groupements d'Ingram avaient déjà été aperçus par Gilles [3], et deux multiplets nouveaux ont été signalés par Lacroute [4] dans la région de Schumann. L'absence de raies d'intercombinaison entre doublets et quadruplets a empêché Ingram de situer avec précision la position des niveaux doubles par rapport aux niveaux quadruples.

Le tableau suivant contient les multiplets nouveaux que nous avons observés, dont quelques-uns sont des multiplets d'intercombinaison.

I. — *Combinaisons nouvelles formées avec les termes connus.*

$4d\,{}^2F - 4p\,{}^2D$;	(10) 6312,68;	(10) 6102,28;	(4) 6287,06.
$b\,{}^2P - 4p'\,{}^2D$;	(2) 2847,41;	(1) 2880,52;	une raie manquante.
$4p'\,{}^2F - 4d\,{}^2F$;	(4) 6138,98;	(00) 6326,43;	les autres raies manquent.

---

(1) L. et E. Bloch, *Comptes rendus*, **185**, 1927, p. 761.

(2) *Physical Review*, **32**, 1928, p. 172.

(3) *Comptes rendus*, **186**, 1928, p. 1109 et 1354.

(4) *Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 975.

II. — *Combinaisons impliquant des termes nouveaux.*

$4p^2S_1 = 63022,15$ (valeur rapportée aux doublets d'Ingram).

$4p^2S - 5s^2P$; (3) 3860,15; (2) 3783,20.

$b^2P - 4p^2S$; (1) 5142,33; (2) 5027,19.

$4d'^2F_3 = 24275,19$; $4d'^2F_4 = 24272,07$; $\Delta = 3,12$.

$4p'^2F - 4d'^2F$; (0) 4180,67; (4) 4165,14; (0) 4180,12; (1) 4164,59.

$4p'^2D - 4d'^2F$; (2) 4249,91; (6) 4257,42; une raie manquante.

$4d^2P_1 = 32889,43$; $4d^2P_2 = 33235,43$; $\Delta = 346,00$.

$4p^2S - 4d^2P$; (0) 3317,70; (5) 3356,26.

$4p^2D - 4d^2P$; (1) 4150,72; (1) 4058,77; une raie manquante.

$3d^4D_1 = 74662,30$; $3d^4D_2 = 74624,05$;

$3d^4D_3 = 74593,64$; $3d^4D_4 = 74545,20$.

$\Delta = 38,15$; $\Delta = 30,41$; $\Delta = 48,44$.

$3d^4D - 4p^4P$; (9) 6413,71; (8) 6398,05; (8) 6397,30; (8) 6384,89; (4) 6369,34; (10) 6305,51; (8) 6286,35; (3) 6274,34.

$3d^4D - 4p^4S$; (3) 5951,30; (2) 5940,69; (1) 5927,15.

$3d^4D - 4p^4D$; (4) 6981,40; (2) 7164,63; (1) 6957,95; (2) 7124,28.

Les raies manquantes sont toutes, sauf une, au delà de la limite atteinte par nos clichés dans le rouge.

$^2X = 49020,99$.

$^2X - 4d^2F$; (1) 6009,62; (00) 5840,29.

$^2X - 3d^2F$; (3) 4130,95; une raie manque.

$^2Y = 57389,03$.

$^2Y - 4d^2F$; (00) 3922,65; une raie manque.

$^2Y - 3d^2F$; (1) 6314,29; (0) 6128,21.

III. — *Intercombinaisons.*

$3d^2F - 4p^4P$: (0) 6732,88; (1) 6521,39; (1) 6641,06.

$4s^2P - 4p^4P$: (4) 5996,16; (1) 6097,12; (1) 6123,41; (2) 5908,25; (1) 5932,95.

$4p^4P - 5s^2P$: (2) 4533,35; (0) 4518,76; trois raies manquent.

$4s^4P - 4p^2D$; (6) 4779,12; (4) 4681,30; (2) 4804,13; (1) 4742,44; une raie manque.

$4s^4P - 4p^2P$; (5) 4193,52; les autres raies manquent.

$4s^4P - 4p^2S$; (2) 6386,48; une raie manque.

$4p^2D - 4d^4D$; (4) 4497,85; (00) 4415,37; les autres raies manquent.

$a^4S - a^2D$; (00) 6731,40; une raie manque.

$3d^4D - 4p^2D$; (0) 5895,89; (2) 6092,13; (1) 6080,85; deux raies manquent.

La découverte des multiplets d'intercombinaison de S II fixe à + 317,20

la correction à apporter aux termes de doublets d'Ingram pour les ramener au même zéro que les termes de quadruplets. Elle nécessite aussi un changement dans l'interprétation du troisième multiplet signalé récemment par Lacroute dans l'ultraviolet de Schumann.

SPECTROSCOPIE. — *Sur les spectres d'absorption de l'oxygène et de l'ozone dans la région ultraviolette.* Note de M. J. **Dufay**, présentée par M. Ch. Fabry.

I. L'oxygène liquide et le gaz à haute pression présentent, au-dessous de 2400 Å, une région d'absorption continue, bordée, du côté des grandes longueurs d'onde, par une série de bandes plus étroites, étudiées notamment par Ciechomski ([1]) et par Shaver ([2]). Les deux premières colonnes du tableau donnent, d'après Ciechomski, les positions des extrémités de ces bandes et leurs positions moyennes. Récemment Wulf ([3]) a attribué ce spectre à la molécule O^4, dont la présence dans l'oxygène à haute pression paraît établie par les recherches de Lewis ([4]).

La région d'absorption continue correspondrait à la dissociation $O^4 \rightarrow O^3 + O$, et l'ozone produit dans l'oxygène comprimé par la radiation $\lambda = 2090$ Å, proviendrait de cette dissociation. On comprendrait ainsi pourquoi la radiation $\lambda = 2090$ Å satisfait approximativement à la loi d'équivalence photochimique, comme l'a constaté Warburg ([5]).

II. On sait d'autre part que la courbe d'absorption de l'ozone, à l'intérieur de la grande bande ultraviolette, qui s'étend de 3000 à 2200 Å environ, montre une série d'ondulations faibles, découvertes par Shaver ([2]) et étudiées plus complètement par Chalonge et Lambrey ([6]). Elles apparaissent souvent comme les composantes d'ondulations plus larges ([6]). La troisième colonne du tableau donne, pour les longueurs d'onde supérieures à 2750 Å, les positions des bandes extrêmes de chaque groupe, d'après

([1]) Ciechomski, *Dissertation*, Fribourg, 1910.
([2]) Shaver, *Proc. Roy. Soc. Canada*, 15, 1921, sect. III, 7.
([3]) Wulf, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, 14, 1928, p. 356.
([4]) Lewis, *Journ. Amer. Chem. Soc.*, 46, 1924, p. 2027.
([5]) Warburg, *Berl. Ber.*, 1914, p. 872; *Z. f. Elektrochemie*, 7, 1921, p. 135.
([6]) Chalonge et Lambrey, *Comptes rendus*, 184, 1927, p. 1165.

Chalonge et Lambrey. Les positions moyennes des ondulations larges, contenues dans la quatrième colonne du tableau, diffèrent très peu de celles des bandes de l'oxygène, et, si l'on groupe de même les bandes de l'ozone de longueurs d'onde inférieures à 2750 Å, la coïncidence se maintient dans toute l'étendue où les spectres peuvent être comparés. (Écart moyen : 1 Å.)

TABLEAU.

(1). Å	(2).	(3).		(4).
2875 2839	2857,0	2872,5 2859,5 2852,0 2841,5	2 groupes voisins de 4 bandes chacun.	2857,0
		2833,7 2822,0	Groupe de 3 bandes.	
2809 2777	2793,0	2810,0 2773,0	Groupe de 4 bandes.	2791,5
2767 2760	2763,5	2761,5	1 bande.	2761,5
2752 2719	2735,5	2752,0 2718,3	4 bandes.	2735,2
2700 2670	2685,0	2710,0 2665,0	4 bandes dont 2 fortes [1].	2687,5
2655 2625	2640,0	2654,8 2642,5 2623,5	3 bandes fortes.	2639,2
2610 2585	2597,5	2606,0 2587,0	2 bandes fortes.	2596,5
2571 2546	2558,5	2570,5 2552,7	2 bandes fortes.	2561,6
? ?	2518	2538,0 2517,7 2499,4	3 bandes fortes.	2518,7
?	2490	2489,7	1 bande forte.	2489,7

III. Il serait assez surprenant qu'une telle coïncidence soit purement accidentelle. Aussi est-il permis de se demander s'il ne s'agit pas en réalité des mêmes bandes, élargies, dans le cas de l'oxygène liquide ou comprimé à une centaine d'atmosphères, par suite de la forte densité du milieu

---

[1] En considérant seulement les bandes fortes 2696,0 et 2675,7, on trouve comme position moyenne 2685,8 Å.

absorbant ([1]). A l'appui de cette manière de voir, rappelons que la courbe d'absorption de l'ozone ne montre plus d'ondulations au-dessous de 2400 Å : l'absorption serait alors tout à fait continue comme celle de l'oxygène comprimé.

Cependant Shaver considère les deux spectres comme distincts; mais il ne les a comparés que dans un étroit intervalle, de 2700 à 2600 Å environ ([2]). De nouvelles recherches paraissent donc nécessaires pour établir s'il existe une parenté réelle entre les deux spectres.

ÉLECTRO-OPTIQUE. — *Sur l'allure des valeurs des discontinuités d'absorption* K *des corps simples*. Note ([3]) de MM. **V. Dolejšek** et **K. Pestrecov**, présentée par M. M. de Broglie.

On ne peut pas bien suivre l'allure des valeurs des limites d'absorption dans le système périodique si l'on ne tient pas compte de la circonstance que ces valeurs dépendent considérablement des liaisons chimiques ainsi qu'il résulte des travaux de MM. A. E. Lindh ([4]), D. Coster ([5]), O. Stelling ([6]).

Nous avons reconnu dans un travail précédent ([7]) que la variation des discontinuités d'absorption en fonction du nombre atomique de l'écran se

---

([1]) Dans cette hypothèse, la structure particulière de la grande bande de l'ozone, de 2900 à 2400 Å, pourrait résulter de la superposition d'un spectre continu, correspondant à la dissociation de la molécule O^3, et d'un spectre de bandes, identique à celui de l'oxygène comprimé. Mais, si ce dernier appartient, comme le pense Wulf, à la molécule O^4, il est difficile d'admettre la présence de telles molécules en proportion appréciable dans l'oxygène ozonisé par l'effluve à basse pression.

([2]) Shaver a observé seulement quatre bandes de l'oxygène et il a résolu trois d'entre elles en triplets de bandes plus fines, dont plusieurs coïncident à peu près avec des bandes individuelles de l'ozone.

([3]) Séance du 26 décembre 1928.

([4]) A. E. Lindh, *Comptes rendus*, **172**, 1921, p. 1175; **175**, 1922, p. 25; *Zeits. f. Phys.*, **6**, 1921, p. 303; **31**, 1925, p. 210.

([5]) D. Coster, *Zeits. f. Phys.*, **83**, 1924, p. 25.

([6]) O. Stelling, *Dissertation Lund*, 1927.

([7]) V. Dolejšek, *Comptes rendus*, **184**, 1927, p. 964; *Zeits. f. Phys.*, **46**, 1927, p. 132.

compose d'une partie continue exprimée par l'équation

$$\sqrt{\frac{\nu}{R}} = a + bN + cN^2 + dN^3$$

et d'une partie périodique se superposant à la première.

Pour préciser l'allure et le caractère de ces variations périodiques pour les éléments pris dans le même état chimique (par exemple à l'état de corps simple) nous avons mesuré de nouveau la limite d'absorption K de quelques éléments jusqu'au numéro atomique 30.

Nous avons appliqué la méthode indiquée par M. Valouch ([1]) pour mesurer la limite d'absorption K du corps simple de numéro atomique 27. Comme lignes de référence nous avons employé celles des séries K ([1]) et L ([1]) et nous avons obtenu les valeurs suivantes :

N°.	Élément.	λ (unités X).	$\frac{\nu}{R}$.
30	Zn	1280,5	711,63
29	Cu	1377,5	661,54
28	Ni	1484,7	613,75
27	Co	1604,4 ([1])	567,98
26	Fe	1739,5	523,86

Pour les autres éléments légers nous avons pris les valeurs mesurées par certains auteurs.

Nos valeurs se joignent très bien à celles des corps simples déterminées par K. Chamberlain ([2]) pour les éléments de numéros atomiques 25, 24, 23, 22 et à celles de A. E. Lindh ([3]) déterminées pour les mêmes éléments et pour ceux des numéros atomiques 20, 19, 16, 15.

Ainsi que Bohr et Coster ([4]) l'ont trouvé et que nous l'avons déjà indiqué dans le travail précédent, au voisinage du numéro atomique 29 se trouve la première variation d'allure de la loi de Moseley pour le niveau K.

En complétant les valeurs du niveau K des corps simples par celles que nous avons mesurées on peut exactement déterminer le caractère de cette variation de l'allure de la manière suivante : L'allure des fréquences du

---

([1]) M. Valouch, *Public. de la Fac. des sciences de l'Université Charles*, n° 82, 1928. — M Siegbahn-V. Dolejšek, *Zeits. f. Phys.*, 10, 1922, p. 159. — E. Friman, *Zeits. f. Phys.*, 39, 1926, p. 813.

([2]) Chamberlain, *Phys. Rev.*, 26, 1925, p. 525.

([3]) A. E. Lindh, *loc. cit.*

([4]) N. Bohr-D. Coster, *Zeits. f. Phys.*, 12, 1923, p. 342.

niveau K s'exprime par

$$\frac{\nu}{R} = a' + b'N + c'N^2 + d'N^3 + e'N^4,$$

où les coefficients a', b', c' sont calculés d'après les fréquences des gaz rares, et l'on peut alors calculer les différences entre les valeurs calculées et expérimentales.

Ces différences sont données dans le tableau suivant :

Nos.	Élément.	$\Delta \frac{\nu}{R}$.	Nos.	Élément.	$\Delta \frac{\nu}{R}$.
30	Zn	+1,2	20	Ca	−0,7 (2)
29	Cu	+1,1	19	K	−0,3 (2)
28	Ni	+0,6	18	A	0,0 (3)
27	Co	+0,2 (1)	17	Cl	»
26	Fe	+0,2 +0,1 (2)	16	S	0,0
25	Mn	−0,4 (1)	15	P	+0,2 (2)
24	Cr	−0,7 (4) −0,4 (2)	14	Si	+0,3 (2)
23	Va	−1,0 (1) −0,8 (2)	13	Mg	+0,3 (3)
22	Ti	−1,0 (1) −0,8 (2)	12	Na	+0,4 (3)
21	Sc	– –			

Les valeurs anciennes de Fricke relatives à l'aluminium et au magnesium ne donnent pas des différences plus grandes que les autres corps simples et peuvent être regardées comme relatives a ces corps pris à l'état simple.

Il y a d'après Lindh deux valeurs pour le chlore; celle de Cl^1 correspond le mieux aux valeurs des autres éléments, il est possible que la valeur plus divergente de Cl^2 soit due à la liaison moléculaire.

L'inspection des différences entre les valeurs expérimentales et les valeurs continues déduites de l'équation précitée montre que ces différences varient périodiquement.

La variation périodique au voisinage de $N = 29$ surpasse considérablement la limite de précision des mesures, il en est de même en signe contraire vers $N = 21$. D'après nos idées sur la formation successive des atomes on devrait prévoir une discontinuité dans l'allure de la variation périodique; mais le degré de précision des mesures ne permet pas de la constater.

---

(1) Chamberlain, *loc. cit.*

(2) A. E. Lindh, *loc. cit.*

(3) H. Fricke, *Phys. Rev.*, 16, 1920, p. 202.

(4) M. A. Valouch, *loc. cit.*

PHOTOCHIMIE. — *Influence de la nature du fixateur sur le développement après fixage des plaques photographiques inversées ou solarisées.* Note (¹) de M. **Henri Belliot**, présentée par M. Jean Perrin.

Dans une récente Communication (²), j'ai proposé une interprétation du développement après fixage des plaques photographiques inversées ou solarisées qui entraînait comme conséquence la propriété suivante : *le résultat obtenu doit dépendre des propriétés réductrices du bain de fixage.*

Les expériences dont les résultats sont résumés dans le tableau et les figures qui suivent semblent montrer en effet que :

1° On rapproche d'autant plus le résultat de celui que donne le développement chimique, qu'on utilise un fixateur plus réducteur;

2° On obtient, pour un même fixateur, la même évolution en alcalinisant ce fixateur, l'évolution inverse en l'acidifiant.

Les expériences ont été réalisées avec des plaques Lumière étiquette violette, impressionnées dans les conditions décrites dans la Note rappelée ci-dessus (²).

	Sens des rapports des densités				Limite du spectre (a) dans l'infrarouge.
	$\frac{\text{fond sol. }(b)}{\text{fond voilé }(c)}$.	$\frac{\text{spectre sol. }(e)}{\text{fond voilé }(c)}$.	$\frac{\text{spectre sol. }(d)}{\text{fond sol. }(b)}$.	$\frac{\text{spectre sol. }(d)}{\text{spectre sol. }(e)}$.	
Développement chimique ou développement physique avant fixage (*fig.* 1)...	<1	<1	<1	<1	$0^{\mu},87$ (³)
Développement physique après fixage. Fixateurs :					
$SO^3Na^2(N) + NH^3\left(\frac{N}{10}\right)$............	<1	<1	<1	>1	$0^{\mu},78$
$S^2O^3Na^2(N) + NH^3\left(\frac{N}{10}\right)$ (*fig.* 2).....	>1	<1	<1	>1	$0^{\mu},75$
$SO^3Na^2(N) + SO^3NaH\left(\frac{N}{10}\right)$........	>1	voisin de 1	<1	>1	$0^{\mu},75$
$S^2O^3Na^2(N) + SO^3NaH\left(\frac{N}{10}\right)$ (*fig.* 3).	>1	>1	<1	>1	$0^{\mu},75$
$SO^3NaH(N)$ (*fig.* 4).................	>1	>1	<1	>1	$0^{\mu},66$
Allylthiourée ou sulfocyanate d'ammonium (*fig.* 5).....................	infini	infini	>1	>1	pas d'image

(¹) Séance du 26 décembre 1928.

(²) *Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 1289.

(³) Maximum de densité pour $0^{\mu},67$.

Les fixages à l'hyposulfite de sodium (alcalin ou acide) ont duré 10 minutes. Les autres fixages ont duré de 2 à 5 jours, les bains étant renouvelés deux fois par jour.

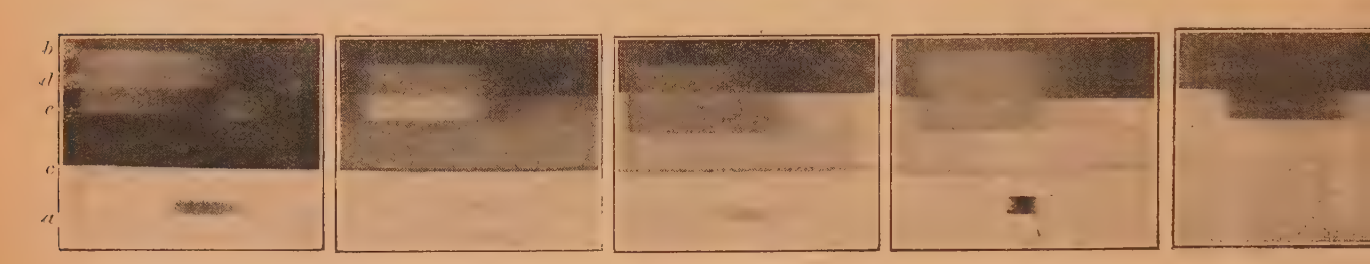


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.

Le développement physique a été effectué avec les révélateurs à l'argent et au mercure de MM. A. et L. Lumière et Seyewetz. Pour un même fixage, les deux révélateurs ont donné des résultats analogues. Seules les plaques fixées à l'allylthiourée ou au sulfocyanate d'ammonium n'ont été développées qu'au mercure, le révélateur à l'argent étant décomposé en présence des petites quantités de fixateur qui sont retenues par la plaque malgré les lavages.

L'influence de l'addition d'alcali au bain de fixage est conforme à celle que MM. A. et L. Lumière et Seyewetz ont mis en évidence [1]; ces auteurs affirment d'ailleurs, à la suite de certaines de leurs expériences, que le développement physique n'est possible que si les germes ont été préalablement traités par un réducteur approprié.

MM. H. I. Vogler et W. Clark [2] ont expliqué l'action de l'alcali ajouté au bain de fixage, en disant qu'il diminue la « peptisation des germes d'argent » (c'est-à-dire la dispersion des atomes d'argent qui les constituent) par le bain de fixage.

S'il est possible que cet effet de « peptisation » intervienne, il n'est pas suffisant pour expliquer les différences observées dans les expériences qui ont été décrites ici. Il est vraisemblable que cette peptisation est plus intense dans le fixage par le sulfite de sodium alcalinisé, qui dure plusieurs jours et nécessite plusieurs renouvellements de la solution, que dans l'hyposulfite de sodium alcalinisé de la même manière, où la plaque ne

(1) *Comptes rendus*, 179, 1924, p. 14.

(2) H. I. Vogler et W. Clark, *Brit. H. Phot.*, 74, p. 670. Résumé dans *Sc. et Ind. Phot.*, 8, p. 1.

reste que quelques minutes. C'est cependant le premier bain qui donne l'effet de développement le plus intense.

Certains fixateurs utilisés (hyposulfite, allylthiourée, sulfocyanate d'ammonium) ont aussi la propriété de dissoudre lentement l'argent. Cette propriété, comme la précédente, peut altérer les résultats mais ne peut suffire à les déterminer, sans quoi l'action développatrice du bisulfite de sodium, qui ne dissout pas du tout l'argent, paraîtrait supérieure à celle de l'hyposulfite, qui le dissout.

Il est enfin à remarquer que les parties du spectre (a) qui disparaissent lorsqu'on passe du développement chimique au développement physique ne sont pas celles qui correspondent aux plus faibles densités, mais celles qui correspondent aux plus grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire aux radiations capables d'activer des molécules sensibles, mais non pas de réduire à l'état métallique des molécules activées. C'est ainsi qu'on ne retrouve plus sur la plaque développée après fixage au bisulfite de sodium (limite $0^{\mu},66$), la longueur d'onde correspondant au maximum de densité sur les plaques développées chimiquement ($0^{\mu},67$).

Pour résumer les résultats des expériences décrites dans cette Note, nous compléterons notre théorie des phénomènes photographiques de la façon suivante :

L'image par développement physique après fixage est obtenue en utilisant :

1° *Les molécules réduites directement sous l'action de la lumière ;*

2° *Dans la mesure où le fixateur est capable d'en réaliser la réduction, les molécules activées et un plus ou moins grand nombre des molécules voisines.*

CHIMIE PHYSIQUE. — *Mise en évidence des transformations des laitons contenant de 57,5 à 63,5 pour 100 de cuivre, par l'étude de propriétés mécaniques.* Note de M. **P. Dejean**, présentée par M. H. Le Chatelier.

On sait que les transformations (qui se produisent au cours du chauffage ou du refroidissement des alliages) peuvent être mises en évidence par l'étude de nombreuses propriétés dont les variations présentent, aux températures de transformation, des anomalies plus ou moins accusées. Les propriétés mécaniques sont assez rarement utilisées dans ce but, car on considère qu'elles ne fournissent généralement pas des résultats bien nets.

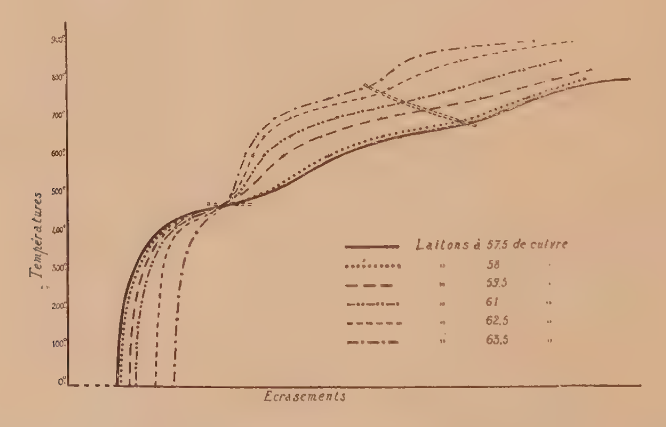
Nous avons eu au contraire des indications extrêmement précises en étudiant l'aptitude à l'écrasement ou, si l'on aime mieux, la plasticité, de toute

une série de laitons de décolletage dont les teneurs en cuivre variaient de 57,5 à 63,5. Or, le titre fictif de ces laitons est sensiblement égal au titre en cuivre des alliages cuivre-zinc purs. On peut donc sans inconvénient les comparer avec ceux-ci.

On a prélevé dans chacun des lingots de cette série un certain nombre d'éprouvettes cylindriques de deux dimensions différentes. Les unes, type n° 1, de 30^{mm} de diamètre et 45^{mm} de hauteur, les autres, type n° 2, de 20^{mm} de diamètre et 30^{mm} de hauteur. Ces éprouvettes étaient destinées à des essais d'écrasement à diverses températures.

Pour le chauffage, chaque éprouvette était placée dans un four électrique disposé à côté du mouton et préalablement porté à la température à laquelle on désirait chauffer l'éprouvette. Elle y était maintenue le temps nécessaire pour être uniformément portée dans toute sa masse à la température voulue. Ce résultat atteint, elle était vivement retirée du four et placée sur l'enclume d'un mouton de 50^{kg} qu'on laissait tomber de 2^{m}. Cette mise en place et l'écrasement duraient à peine quelques secondes.

Les éprouvettes du type 1 ont été utilisées de la température ordinaire jusqu'à 700°. Comme elles auraient donné des écrasements trop forts pour les températures plus élevées (ce qui aurait diminué la sensibilité de la méthode), on a adopté pour une autre série d'essais, comprise entre 500 et 900°, le type 2 dont les dimensions sont plus fortes. Entre 500° et 700°, les essais faits avec les deux types d'éprouvettes ont permis un recoupement suffisant pour trouver un coefficient de réduction convenable permettant de tracer sur un seul diagramme des courbes continues d'écrasement de 0° à 900°.



Les résultats obtenus sont rassemblés sous forme de courbes dans la figure.

On remarque que ces courbes présentent toutes deux points d'inflexion que nous avons réunis par des lignes interrompues à double trait. Il est à souligner que ces points coïncident d'une manière tout à fait remarquable avec les anomalies des laitons relevés par les autres méthodes et, en particulier, avec celles notées par Tsutomu Matsuda ([1]) dans un des plus récents travaux sur la question. Nous donnons, du reste, dans le tableau ci-dessous les résultats de Matsuda et ceux que nous avons obtenu par écrasement.

Teneurs en cuivre des laitons.	Première anomalie.		Deuxième anomalie (transformation de $\alpha+\beta$ en β).	
	Essais de Matsuda.	Essais d'écrasement.	Essais de Matsuda.	Essais d'écrasement.
57,5	480°	475°	688°	685°
58	480	475	700	690
59,5	480	475	727	720
61	480	475	748	740
62,5	480	475	775	765
63,5	480	475	800	783

L'examen des courbes permet en outre de tirer les conclusions suivantes :

1° Sans vouloir prendre parti dans la discussion qui s'est ouverte au sujet de la nature de la première anomalie du constituant β, située aux environs de 480°, nous dirons seulement que, conformément aux conclusions de MM. Matsuda et Imai, confirmées par les essais de dureté de M. L. Guillet ([2]), la modification des propriétés due à cette anomalie ne se produit pas d'une manière brusque à 480°, mais qu'au contraire elle s'effectue progressivement à partir de 250 à 300°. Malgré cette allure progressive, la transformation dont le constituant β est le siège n'en est pas moins extrêmement profonde, puisqu'il y a inversion dans l'ordre de plasticité des laitons de décolletage lorsqu'on passe par la température de transformation. Ceux qui contiennent le moins de constituant β, qui étaient le plus plastique à froid, le sont le moins à chaud. Ils sont forgeables à froid, mais non à chaud. La proposition est inversée, au contraire, pour ceux qui contiennent une forte proportion de β.

2° La deuxième anomalie (transformation de $\alpha + \beta$ en β seul) est également bien mise en évidence par les essais d'écrasement.

([1]) *Science Reports of the Tôhoku Imperial University*, 11, n° 4, p. 223.

([2]) *IIIe Congrès de Chimie Industrielle* (*Chimie et Industrie*, numéro spécial, mai 1924, p. 341).

Cette méthode pourrait dans bien des cas être généralisée et rendre de grands services. Nous avons montré, en effet, qu'elle était susceptible d'une précision et d'une sensibilité bien supérieure à celle qu'on aurait pu prévoir.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur les transformations internes d'un cupro-aluminium.* Note de MM. **Albert Roux** et **Jean Cournot**, présentée par M. Léon Guillet.

Nous avons entrepris une série d'essais par rayons X [1] sur les phénomènes de transformations structurales dans certains alliages, et nous allons décrire ici quelques résultats intéressants obtenus sur un cupro-aluminium du type 90-10.

La micrographie de l'alliage recuit donnait environ $\frac{2}{3}$ de la solution α et $\frac{1}{3}$ d'eutectique.

Différents traitements thermiques ont été étudiés; les résultats les plus nets correspondent à :

Recuit de 20 minutes à 900°, refroidissement lent;
Trempe à l'eau froide après chauffage de 5 minutes à 900°;
Revenu de 20 minutes à 200°, du métal trempé;
Revenu de 20 minutes à 650°, du métal trempé.

La méthode utilisée pour l'obtention des spectres a été décrite ici [2].

Les échantillons essayés présentaient une face polie et attaquée par l'acide azotique en vue de destruction de l'écrouissage de surface, dû au polissage.

Les durées de pose étaient de 6 heures.

Métal recuit. — Le tableau suivant résume les résultats :

Déviation en millimètres des rayons.	Déviation angulaire en grades.	Distance réticulaire en A°.	Intensité des raies.	Plan.
20,50	15,88	2,097	forte	111
23,75	12,45	1,829	moyenne	100
33,50	17,77	1,294	moyenne	110
39,75	21,09	1,094	moyenne	311
41,50	22,02	1,050	faible	222

(1) Partie des recherches entreprises grâce à la subvention accordée par l'Académie sur la Fondation Le Chatelier.

(2) *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1733.

Le système réticulaire est un cube à faces centrées d'arête $a = 3,637$.

Métal trempé. — Nous avons obtenu ici :

Déviation en millimètres des rayons.	Déviation angulaire en grades.	Disttance réticulaire en A°.	Intensité des raies.
20,25	10,74	2,120	moyenne
21,25	11,28	2,046	forte
22,00	11,67	1,953	moyenne
33,00	17,51	1,312	faible
39,25	20,83	1,141	très faible
41,50	22,02	1,050	moyenne

D'autre part, seule la première raie est continue; les autres sont discontinues.

Métal trempé et revenu. — Le revenu à 200° donne les même raies que le métal trempé, mais plus nettes.

Le revenu à 650° donne un spectre identique à celui du mètal recuit.

Conclusions — Malgré la présence micrographique de la solution γ, seul le spectre de la solution α apparaît dans le métal recuit.

Dans le spectre du métal trempé, nous retrouvons partiellement ce spectre de la solution α, avec toutefois une légère déviation des raies et une disparition de la raie correspondant aux plans 100. Nous voyons par contre apparaître deux nouvelles lignes (correspondant aux déviations en millimètres de 21,25 et 22,00); autre remarque : presque toutes les raies sont discontinues.

Le temps de pose étant le même, nous concluons que la trempe de ce cupro-aluminium 90-10 maintient à la température ordinaire un constituant hors d'équilibre qui doit être la solution β du diagramme connu, ou mieux la combinaison Cu^3Al en solution solide dans α.

Nous attribuons la discontinuité des raies à la facilité de surchauffe du métal, les grains grossissant vite et ne correspondant plus aux dimensions optima nécessaires pour l'obtention des raies continues.

La dureté de l'alliage après trempe provient donc, d'une part de la distorsion du réseau α et d'autre part de la présence de la combinaison.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur l'application aux variétés allotropiques du phosphore de la théorie de M. Smits.* Note [1] de M. **Pierre Jolibois**, transmise par M. H. Le Chatelier.

M. Smits [2] interprète suivant sa théorie de l'allotropie dynamique les résultats publiés précédemment par M. Alexeieff [3] relatifs aux variétés allotropiques du phosphore. Bien qu'on ne puisse discuter les travaux de ce dernier auteur qui ne donne pas la moindre indication sur le mode de préparation des variétés de phosphore qu'il a obtenues, on peut remarquer qu'il ne cite pas davantage ceux de ses prédécesseurs qui ont déjà isolé des variétés de phosphore bien définies, en les soumettant à des critériums de pureté d'ailleurs beaucoup plus sévères que les siens.

Ceci m'engage à répondre à des critiques formulées il y a déjà quelque temps par M. Smits [4] à mon travail sur le phosphore [5]. Alors que j'ai montré la nécessité de considérer deux variétés allotropiques du phosphore rouge anciennement connu, M. Smits prétend qu'à chaque température il existe une solution solide en équilibre et que l'existence d'une seule variété de phosphore rouge est à considérer. Son principal argument est la non-existence qu'il a constatée d'un point anguleux dans la courbe de tension de vapeur du phosphore rouge, alors que j'ai au contraire déduit de mes expériences la nécessité d'en admettre l'existence. La différence de nos résultats provient à mon avis de la manière dont M. Smits a mesuré la tension de vapeur du phosphore solide. Dans le cas relativement facile de la mesure de la tension de vapeur du phosphore liquide, nos mesures sont en excellente concordance. Il n'en est plus de même dans le cas de la mesure de la tension de vapeur du solide. J'ai montré dans ma Thèse que l'établissement de l'équilibre de la tension de vapeur du phosphore solide était lent, que pour le rendre suffisamment rapide et pour obtenir des résultats concordants il importait de pulvériser la substance et d'en remplir aussi complètement que possible la chambre de vaporisation après en avoir très soigneusement extrait les gaz. J'ai également insisté sur le fait qu'il fallait exécuter la

---

(1) Séance du 26 décembre 1928.

(2) *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 980.

(3) *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1621.

(4) A. Smits et S. C. Bokhorst, *Zeitschrift für phys. Chem.*, 91, 1916, p. 249.

(5) *Recherches sur le phosphore et les phosphures métalliques* (*Thèse*, Paris, 1910).

mesure en faisant croître régulièrement la température, ou en laissant cette dernière rigoureusement constante. En effet, la variété à faible tension de vapeur (pyromorphique) donne naissance, en se vaporisant, à de la vapeur qui se condense à la moindre baisse de température en phosphore rouge ordinaire dont la transformation en pyromorphique est extrêmement lente; c'est pour cette raison que la tension de vapeur mesurée sans les précautions que j'ai signalées est celle du phosphore rouge ordinaire.

D'autre part, M. Smits ne tient aucun compte des expériences calorimétriques que j'ai faites au moyen du galvanomètre double de MM. Le Chatelier et Saladin, et qui montrent par enregistrement photographique l'existence d'un point de transformation aux environs de 450°. Enfin, une expérience fondamentale également décrite dans le même Mémoire ne peut être expliquée par M. Smits. Si l'on chauffe du phosphore rouge ordinaire *pulvérisé* à 360° pendant 100 heures, il garde une densité de 2,16. Si l'on chauffe le même échantillon pendant le même temps à la même température avec 1 pour 100 d'iode, il prend, après la séparation de l'iodure de phosphore formé, la densité de 2,37 (phosphore pyromorphique). Le phosphore rouge ordinaire est donc instable à 360° et ne peut être considéré comme une solution solide en équilibre. Les frottements chimiques et les états hors d'équilibre (faux équilibre de Duhem) sont très fréquents dans l'allotropie du phosphore, et avant d'appliquer les règles de la thermodynamique, il importe d'abord de vérifier la réversibilité des phénomènes et de rechercher la stabilité réelle des espèces isolées. C'est en particulier la raison pour laquelle l'application faite par M. Smits, de la règle des phases au travail de M. Alexeieff est aventurée. C'est également pour cette cause que les solutions solides hors d'équilibre (puisqu'une trace d'iode les amène dans un long domaine de température à un état constant et stable) considérées par M. Smits ne peuvent rentrer dans le cadre d'une théorie thermodynamique.

La séduisante théorie de M. Smits, qui a déjà été trouvée en défaut par M. Damiens [1], dans le cas de l'iodure mercurique et du tellure, ne s'applique pas davantage au phosphore si l'on ne considère que des variétés en équilibre stable dûment démontré.

En résumé, il y a toujours lieu de considérer quatre variétés de phosphore solide : le phosphore blanc, le phosphore rouge ordinaire, le phos-

(1) *Ann. Ch. Phys.*, 9e série, **18**, 1922, p. 282; *Comptes rendus*, **177**, 1923, p. 816; **178**, 1924, p. 326; *Bull. Soc. ch.*, **35**, 1924, p. 87; **37**, 1925, p. 157.

phore pyromorphique et le phosphore noir de Bridgmann qui a été découvert après la publication de ma Thèse, en soumettant le phosphore blanc à des pressions considérables. Ces variétés peuvent toutes coexister à la température et la pression ordinaires, par suite de résistances passives; mais seul le phosphore pyromorphique (ou peut-être le phosphore noir) [1] est stable. Quant aux variétés de densité intermédiaire obtenues par chauffage, elles constituent des états de transformation incomplète dus à la lenteur des réactions de passage d'une variété à l'autre.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur une mono-ammine cobaltique.*
Note de M. **Clément Duval**, présentée par M. G. Urbain.

On sait que Werner a rangé les cobaltiammines en sept séries renfermant des quantités décroissantes d'ammoniac. Jusqu'à présent les complexes du type

$$[Co.NH^3.X^5]M^2$$

faisaient défaut. La préparation suivante conduit au premier corps isolé dans cette série :

Dix grammes de *trinitrato-triammine* $[Co(NO^3)^3(NH^3)^3]$ sont chauffés au bain-marie pendant un quart d'heure, à 45°, avec 50^{cm^3} d'eau et $7^g,5$ de *métaborate de sodium*. La liqueur devient violette. Il se dégage de l'ammoniac. Par refroidissement, un précipité gris violacé apparaît. Il est lavé à l'alcool et à l'éther. Il est peu soluble dans l'eau (1 partie dans 3000 parties d'eau). Pour l'analyse la substance est mise en solution par l'acide sulfurique. Le cobalt est dosé par électrolyse dans la liqueur. Celle-ci est réduite à un petit volume et additionnée d'azotate de baryum, en léger excès. Les précipités de sulfate et de borate de baryum sont filtrés et les eaux de lavage reçoivent une nouvelle addition d'acide sulfurique, précipitant ainsi l'excès d'ions Ba. Le sodium est alors dosé sous forme de sulfate dans le liquide résiduel.

L'ammoniac a été déterminé par distillation avec la soude et le bore a été dosé par volumétrie à l'aide de glycérine sur une autre prise d'essai de la substance.

Calculé pour $[Co(BO^2)^5.NH^3]Na^2$: Co 17,50; NH^3 5,04; B 16,3) Na 13,6.

Trouvé : Co 17,42; NH^3 5,17; B 16,01; Na 13,4.

Le produit isolé est donc le *cobalti-ammonioborate de sodium*.

La méthode d'obtention précédente paraît être susceptible de généralisation.

---

(1) Aucune étude n'a été faite, à ma connaissance, des domaines de stabilité de cette espèce qui est la plus dense qui soit connue.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur quelques dérivés de l'acide hydantoïne-3-acétique*. Note de MM. **R. Locquin** et **V. Cerchez**, transmise par M. Moureu.

Nous avons mentionné précédemment [1] que, sous l'action des chlorures d'acides, l'aminomalonate d'éthyle (sodé, ou mieux, simplement en présence de pyridine) conduit à des dérivés *acylés à l'azote*.

Avec le phosgène, on obtient ainsi un *tétraéther*

$$(COOC^2H^5)^2 = CH - NH - CO - NH - CH = (COOC^2H^5)^2 \quad [P.F. = 167^\circ],$$

qui peut fournir par saponification deux acides différents (A et B):

A. Sous l'influence de la soude à 4 pour 100 à la température du bain-marie, il perd $2CO^2$ et conduit à l'*acide carbamido-diacétique*

$$HOOC - CH^2 - NH - CO - NH - CH^2 - COOH$$

fondant à 208° avec dégagement gazeux.

Éthérifié avec précaution (par exemple, en le chauffant quelques instants seulement avec de l'alcool contenant *une trace* de HCl), cet acide se transforme en le diéther correspondant ou carbamido-diacétate d'éthyle [P.F. = 146°], déjà préparé différemment par E. Fischer [2], puis par Gränacher et Landolt [3]. Par contre, une éthérification énergique (par exemple, en chauffant le diacide pendant quelques heures avec de l'alcool saturé de HCl) conduit à un mono-éther *cyclique* constitué par l'*hydantoïne-3-acétate d'éthyle*,

$$CO\begin{cases} NH_{(1)} - CH^2_{(5)} \\ \qquad \qquad | \\ N_{(3)} \;—\; CO_{(4)} \\ | \\ CH^2 - COOC^2H^5 \end{cases} \qquad (P.F. = 120^\circ)$$

composé que nous avons également obtenu en chauffant pendant quelques heures le carbamido-diacétate d'éthyle avec un excès d'acide chlorhydrique en solution alcoolique.

---

(1) R. Locquin et V. Cerchez, *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1360; *Bull. Soc. chim.*, 43, 1928, p. 932.

(2) E. Fischer, *Berichte D. ch. G.*, 34, 1901, p. 433, et 35, 1902, p. 1095.

(3) Gränacher et Landolt, *Helvet. Chim. Acta*, 10, 1927, p. 805.

B. Si, au lieu de saponifier le tétraéther au moyen des alcalis, on le chauffe à reflux avec une solution aqueuse de HCl à 10 pour 100, on obtient directement et avec un excellent rendement l'*acide hydantoïne-3-acétique* lui-même $(C^3H^3O^2N^2)CH^2 = COOH$ [P.F. = 195-196°], dont voici quelques nouveaux dérivés :

I. *Chlorure d'hydantoïne-3-acétyle* : $(C^3H^3O^2N^2)CH^2 - COCl$. — On le prépare aisément à l'aide du chlorure de thionyle. Il est solide, insoluble dans l'éther anhydre ou dans le benzène, mais soluble à chaud dans le tétrachloréthane d'où il cristallise par refroidissement. On ne peut lui assigner un point de fusion défini, car ce composé s'hydrate rapidement à l'air et se décompose quand on le chauffe.

Libre ou en solution dans le tétrachloréthane il réagit énergiquement sur les corps basiques tels que l'ammoniaque et les composés aminés, en donnant les *dérivés amidés normaux* correspondants. On peut, dans certains cas, réaliser la condensation en présence d'une solution aqueuse alcaline (méthode Schotten-Baumann), mais il est en général préférable d'opérer en présence de pyridine et d'un solvant neutre.

Nous avons, entre autres, préparé le *dérivé hydantoïne-3-acétylé :* 1° de l'*aniline :* $[(C^3H^3O^2N^2)CH^2 - CO - NH - C^6H^5$, fines paillettes brillantes fondant à 215° sur Hg]; 2° de l'*amino-malonate d'éthyle :* $[(C^3H^3O^2N^2)CH^2 - CO - NH - CH = (COOC^2H^5)^2$, aiguilles soyeuses. P. F. 172-173°]; 3° du *glycocollate d'éthyle :*

$$[(C^3H^3O^2N^2)CH^2 - CO - NH - CH^2 - COOC^2H^5,$$

fines aiguilles brillantes. P. F. = 168°]; 4° de la *méthyl-3-isopropyl-5-pyrazoline :* $[(C^3H^3O^2N^2)CH^2 - CO(C^7H^{13}N^2)$, tablettes. P.F. = 185°].

Ces quelques exemples montrent que les dérivés de ce genre cristallisent aisément et qu'ils possèdent un point de fusion assez élevé, généralement très net. Aussi, bien que les rendements ne soient pas toujours quantitatifs, le chlorure d'hydantoïne-3-acétyle pourrait, le cas échéant, constituer un réactif avantageux pour la caractérisation de certains composés aminés.

II. *Amide.* — Gränacher et Landolt ont avancé que l'ammoniaque aqueuse transforme l'hydantoïne-3-acétate d'éthyle en un *diamide* $C^5H^{10}O^3N^4$ qui fondrait à 226° et qui se trouve identique au diamide résultant normalement de l'action de l'ammoniac liquéfié sur le carbamidodiacétate d'éthyle.

Effectivement, l'action de l'ammoniaque aqueuse sur l'hydantoïne-3-acé-

---

(1) Obtenue elle-même à partir de l'isobutylidène acétone et de l'hydrazine.

tate d'éthyle fournit bien une masse cristalline fondant, brute, vers 226°, mais nous avons, en outre, constaté que, par cristallisation fractionnée de cette masse dans l'eau, on obtient d'abord un dépôt de paillettes brillantes constituées par du *carbamido-diacétamide* $CO=(NH-CH^2-CONH^2)^2$, lequel se décompose au-dessus de 240° en charbonnant, ainsi que l'avait déjà observé E. Fischer. Des eaux mères du dépôt précédent on retire ensuite de fines aiguilles, fondant nettement et sans charbonner à 225-226° et qui ne sont pas autre chose que l'*hydantoïne-3-acétamide* lui-même $(C^3H^3O^2N^2)CH^2-CONH^2$, dont l'existence n'avait pas été signalée.

Nous avons aisément et abondamment reproduit ce mono-amide, à l'exclusion du carbamido-diacétamide, en faisant arriver un courant de gaz ammoniac sec dans une solution tétrachloréthanique de chlorure d'hydantoïne-3-acétyle, ou mieux, en ajoutant peu à peu ledit chlorure à une solution de gaz ammoniac dans l'éther anhydre.

Nous ferons remarquer, pour terminer, qu'il suffit d'additionner le carbamido-diacétamide (décomposable au-dessus de 240°) d'une très faible proportion d'hydantoïne-3-acétamide fondant à 225° pour abaisser le point de fusion du mélange au voisinage de cette dernière température, fait qui explique pourquoi Gränacher et Landolt n'ont pas été avertis de leur erreur par le dosage d'azote qu'ils ont effectué.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur le 3-chlorotropane et sur la non-existence de la bellatropine de Hesse.* Note de MM. **Max** et **Michel Polonovski**, présentée par M. A. Desgrez.

Nos connaissances sur la constitution de la belladonine et sur ses produits d'hydrolyse sont encore fort confuses. Les indications que nous donne la littérature chimique sont en effet des plus contradictoires. Kraut, Merling et Merck identifient la base saponifiée avec la tropine, tandis que Hesse [1], employant comme hydrolysant HCl concentré à 140°, la considère comme un isomère nouveau, différant de la tropine par les propriétés physiques de son chloroplatinate (F. 212°) et de son chloraurate (F. 164°) et qu'il dénomme *bellatropine*.

Doutant *a priori* de l'existence même d'un nouveau stéréoisomère de la tropine et de la pseudotropine, auquel ne répondait aucun schéma de constitution, nous avons repris cette étude.

---

(1) Hesse, *Ann. Chem. Pharm.*, 271, 1892, p. 100.

La belladonine résulte, on le sait, de la polymérisation de l'apoatropine, en milieu alcalin ou acide, et s'en distingue nettement par sa consistance vitreuse, la nature amorphe de ses sels, et par sa grande résistance aux agents d'hydrolyse, notamment à la baryte. Nous en avons préparé le chloroplatinate, avec quelque rigueur de pureté, paillettes très légèrement jaunâtres, très peu solubles dans l'eau, qui, recristallisées dans l'alcool bouillant, fondent à 252° (et non à 229°, comme l'indique Hesse). Le chloraurate, pour lequel Hesse accuse un point de fusion d'environ 120°, est amorphe; il brunit et se ramollit au-dessus de 150° et fond vers 168°.

Nous avons tout d'abord vérifié que l'hydrolyse de la belladonine par la potasse alcoolique était intégrale et conduisait uniquement à la tropine, à côté d'un acide atropique, plus ou moins polymérisé. Nous avons de plus établi que l'hydrolyse par une solution de SO^4H^2 au cinquième conduisait au même résultat. On note cependant la présence d'un peu de tropidine, résultant de l'action déshydratante de SO^4H^2 sur la tropine formée.

Par contre, la saponification par HCl, effectuée selon les indications de Hesse, nous a fourni un composé tout différent. La solution chlorhydrique, chauffée 20 heures en tube scellé à 140°, puis évaporée à siccité, abandonne un résidu que nous avons repris dans l'acétone bouillant; et nous avons eu d'emblée, presque insoluble à froid dans ce solvant, un chlorhydrate que nous avons purifié par recristallisation dans l'alcool absolu. Par décomposition de ce chlorhydrate par CO^3Na^2, on obtient la base elle-même, qu'on extrait très facilement à l'éther.

Huile incolore, à odeur éthérée rappelant un peu celle de l'eucalyptus, bouillant, en se décomposant en partie, vers 163°-165°, elle est très peu soluble dans l'eau, ce qui suffit déjà à la distinguer et à la séparer complètement de la tropine et de la ψ-tropine. Mais sa composition et ses constantes ne répondent en rien aux données indiquées par Hesse pour une *bellatropine*.

Cette base, dont l'analyse correspond à la formule $C^8H^{14}ONCl$, n'est autre en effet que le 3-*chlorotropane*, formé par l'éthérification de l'alcool secondaire de la tropine.

Son chlorhydrate, $C^8H^{14}ONCl\ HCl$ cristallise en prismes blancs fondant à 234°. Il donne un chloroplatinate, jaune orangé, peu soluble dans l'eau et l'alcool, fondant à 227°-228°, un chloraurate, jaune d'or, également peu soluble (F. 215°). Le picrate de 3-chlorotropane est très caractéristique; il cristallise en longues aiguilles jaune clair, fondant à 216°-217°. L'iodométhylate, $C^8H^{24}ONClCH^3I$, peu soluble dans l'alcool méthylique (F. 306°) conduit par réduction par Zn et SO^4H^2 à l'iodométhylate de tropane. Par action de H^2O^2 sur le 3-chlorotropane, on obtient l'ami-

noxyde $C^8H^{24}O^2NCl$, solide blanc, de réaction neutre, très soluble dans l'eau, l'alcool et l'acétone, et dont nous avons préparé le chlorhydrate (F. 210°, cristallisé dans l'acétone bouillant) et le picrate, peu soluble dans l'eau froide (F. 175°).

Nous nous sommes assuré qu'on obtenait ce même dérivé chloré en faisant agir HCl à 140° sur l'apoatropine, et également sur l'hyoscyamine ou l'atropine. *Toutes les tropéines donnent indistinctement et avec un excellent rendement l'éther halogène de la tropine.* La tropine elle-même s'éthérifie également lorsqu'on la traite directement par 8 parties de HCl à 140°.

Lorsqu'on substitue, dans l'hydrolyse de la belladonine ou de l'apoatropine HBr à HCl, on obtient, dans les mêmes conditions, quoique avec un moins bon rendement, le 3-bromotropane, identique avec le composé déjà obtenu par Einhorn et par Willstätter.

La bellatropine décrite par Hesse est donc à rayer de la littérature chimique. Ses constantes physiques sont inexactes, et les sels que cet auteur avait en mains devaient être des mélanges où prédominait le chlorotropane, qui lui a totalement échappé.

Les pseudotropéines paraissent plus résistantes à l'éthérification chlorée. La tropacocaïne (éther benzoïque de la ψ-tropine), traitée 20 heures à 100° par HCl, donne principalement de la pseudotropine : dans les éthers mères, cependant, nous avons isolé un peu d'éther chloré par son picrate, très peu soluble, et qui fond vers 228°.

MINÉRALOGIE. — *Étude microscopique des minerais complexes cupro-argentifères de Colquijirca (Pérou).* Note de MM. **J. Orcel** et **Gil Rivera Plaza**.

L'examen microscopique de sections polies taillées dans des échantillons de minerais provenant de l'important gisement de Colquijirca complète nos observations antérieures sur la région de Cerro de Pasco [1]. D'après cet examen, on peut, au point de vue minéralogique, distinguer parmi ces minerais complexes :

1° Des minerais cupro-argentifères caractérisés par la présence constante de l'*argent natif* ou d'un minéral argentifère tel que la *stromeyérite* ou la *pyrargyrite*.

(1) J. Orcel et Gil Rivera Plaza, *Comptes rendus*, **186**, 1928, p. 769, et *Bull. Soc. franç. Minér.*, **51**, 1928, p. 213-246.

2° Des minerais cuprifères et plombocuprifères, renfermant de la *chalcopyrite*, de *l'érubescite* ou du *cuivre gris* parfois associés à la *galène*. Ces minerais sont aussi argentifères mais beaucoup moins que les précédents.

3° Des minerais plombo-zincifères ne renfermant qu'accessoirement des minéraux cuprifères. Leur teneur en argent est très variable.

1. Parmi les minerais cupro-argentifères, le type le plus fréquent consiste en un mélange à structure très fine de chalcopyrite et de blende toujours associées à la pyrargyrite. Dans certains échantillons ces minéraux sont accompagnés par de la panabase, de l'érubescite ou de l'énargite. La pyrargyrite forme dans ces minerais soit avec la chalcopyrite, soit avec l'érubescite des assemblages à structure graphique. L'argent natif est irrégulièrement réparti sous forme d'inclusions très fines ou de filaments. La plupart des échantillons en renferment. Il est souvent visible à l'œil nu. La pyrite en cristaux automorphes ou en agrégats fragmentaires est présente dans presque tous ces minerais.

Un type de minerai complexe particulièrement intéressant par sa richesse exceptionnelle en minéraux argentifères, mais qui paraît être très localisé dans certaines parties de la zone de cémentation, est constitué essentiellement par la stromeyérite englobant des plages d'énargite (associée souvent à un minéral maclé polysynthétiquement qui possède tous les caractères de la famatinite), de galène, de blende, de pyrargyrite et de chalcopyrite ; le tout est traversé par un réseau de fines veinules irrégulières d'argent natif secondaire. Les limites entre les plages de stromeyérite et de blende sont très finement déchiquetées avec tendance à la structure graphique ; le même aspect s'observe entre les plages de pyrargyrite et de stromeyérite. La blende de ce minerai renferme de curieuses inclusions vermiculées de chalcopyrite, parfois arborescentes ; leurs détails ne sont visibles qu'aux forts grossissements.

2. Les minerais cuprifères sont constitués par de la chalcopyrite, toujours associée à l'énargite, à l'érubescite ou à la panabase. Ces minéraux forment avec la chalcopyrite des groupements à « limites mutuelles » bien caractérisés, avec tendance par place à la texture graphique. Ils sont rarement présents dans le même échantillon en proportions équivalentes, et l'on peut distinguer plusieurs types suivant que l'un ou l'autre de ces trois minéraux prédomine. Ces minerais sont parfois riches en argent ; l'un d'eux, où abonde l'énargite, titre 2^{kg}, 100 d'Ag à la tonne. On voit aussi dans certains d'entre eux des veinules très fines d'argent natif, et parfois aussi de la galène mais toujours en très petites plages.

3. Il existe enfin à Colquijirca des minerais plombo-zincifères constitués par les associations habituelles de blende, pyrite, galène, parfois aussi de marcasite.

La gangue de tous ces minerais est principalement formée de barytine en agrégats de cristaux tabulaires plus ou moins gros, par une argile blanche colloïde dont l'un de nous poursuit l'étude, et par de la sidérite.

Au point de vue métallogénique, l'examen microscopique montre qu'il existe à Colquijirca deux types de minerais d'origines différentes :

1° Les minerais hypogènes (formés en profondeur) et essentiellement constitués par les minéraux suivants : chalcopyrite, blende, galène, pyrite, énargite, panabase, érubescite.

2° Les minerais de la zone de cémentation ou supergènes formés par voie de remplacement métasomatique à partir des précédents, et caractérisés par la présence de l'argent natif et de la stromeyérite.

Ces minerais sont d'une richesse remarquable en argent.

La pyrargyrite existe dans chaque type de minerais; elle est associée à la chalcopyrite et à l'érubescite dans les minerais d'origine profonde, à la stromeyerite dans les minerais supergènes.

CAPILLARITÉ. — *Sur la variation avec la direction de la constante capillaire des corps smectiques.* Note (¹) de M. **Robert Gibrat**, présentée par M. Pierre Termier.

L'observation des formes très éloignées de la sphère pour les gouttes smectiques a conduit M. G. Friedel (²) à l'idée d'une distribution des molécules sur des surfaces parallèles équidistantes, planes dans la structure homogène. Tous ces plans comportent un minimum de la constante capillaire comme le montrent les gouttes à gradins de M. Grandjean; mais de plus l'existence des bâtonnets allongés normalement à l'axe révèle un second minimum relatif de cette constante pour les directions normales aux précédentes. Nous voulons montrer que l'hypothèse faite sur la distribution des molécules donne, grâce à des hypothèses très générales, une expression algébrique de la constante capillaire qui donne les deux minima. Il serait donc inutile d'admettre, comme le proposait M. G. Friedel, une forme linéaire

(¹) Séance du 26 décembre 1928.

(²) *Annales de Physique*, 18, 1922, p. 335 et suiv.

et très allongée des molécules smectiques. L'hypothèse sur la répartition spatiale suffit.

Nous allons étendre aux corps smectiques la théorie de la capillarité de Gauss. Il nous faudra considérer les travaux résultant des déplacements des molécules :

1° Du liquide isotrope par rapport au liquide isotrope ;

2° Du corps smectique par rapport au liquide isotrope et inversement ;

3° Du corps smectique par rapport au corps smectique.

1. La théorie de Gauss donne une constante capillaire A_0 indépendante de la direction.

2. Le potentiel W est donné par la formule

$$W = \int V\, d\tau,$$

soit l'axe des Z normal aux plans équidistants de h du corps smectique, et définissons un point par sa distance ε à la surface de séparation et sa cote z, ces deux quantités étant reliées par la relation

$$z = z_0 + \gamma\varepsilon;$$

γ cosinus de l'angle de la normale à la surface et de OZ; z cote du pied de la normale.

A_1 jouant le rôle de la constante capillaire, on a $A_1 = \int V\, d\varepsilon$; nous expliciterons $V(\varepsilon, z)$ en tenant compte de la rapide décroissance de V avec ε, de la périodicité de V avec z et de la forme que doit présenter $V(0, z)$ pour être vraisemblable :

$$V(\varepsilon, z) = \alpha_0 e^{-a_0\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-a_n\varepsilon} \sin(2n-1)\frac{\pi z}{h} \qquad (0 \leq z \leq h),$$

$$A_1 = \int_0^{\infty} V(\varepsilon, z_0 + \gamma\varepsilon)\, d\varepsilon$$

s'obtiendra par des intégrations faciles à effectuer.

La valeur physique intéressante sera la moyenne de cette quantité quand z_0 varie,

$$\overline{A}_1(\gamma) = \frac{\alpha_0}{a_0} + \sum \frac{2\alpha_n}{(2n-1)\pi a_n} \times \frac{1}{1 + \dfrac{(2n-1)^2\pi^2\gamma^2}{a_n^2 h^2}}.$$

Si γ n'est pas voisin de zéro, on pourra négliger dans le dénominateur l'unité, car $a_n h$, mesurant le coefficient logarithmique d'amortissement à la distance h, est très petit.

D'où

$$\overline{\mathrm{A}}_1(\gamma) = a_1 + \frac{b_1}{\gamma^2};$$

au contraire, si γ est nul, on a $z = z_0$ et l'on obtient

$$\overline{\mathrm{A}}_1(\gamma) = a_1 + \sum \frac{\alpha_n}{a_n} \frac{2}{(2n-1)\pi},$$

valeur finie.

3. Le calcul se conduira de même, en remarquant que l'intégration dans le volume smectique peut se transformer en une intégration dans le volume isotrope.

On obtient ainsi pour $\mathrm{A}_2(\gamma)$

$$\overline{\mathrm{A}}_2(\gamma) = a_2 + \frac{b_2}{\gamma^2}.$$

En résumé, la constante capillaire qui est la somme des A précédents est donnée par la formule suivante :

$$\mathrm{A} = a + \frac{b}{\gamma^2} \quad \text{quand } \gamma \text{ n'est pas nul,}$$

$$\mathrm{A} = a - b' \quad \text{pour } \gamma = 0.$$

A présente donc deux minima relatifs, un pour $\gamma = 0$ qui a l'allure d'une discontinuité et un autre pour $\gamma = 1$, ces deux minima correspondant aux plans passant par l'axe ou perpendiculaires à celui-ci.

La discontinuité pour $\gamma = 0$ explique bien la forme très allongée des bâtonnets, leur bout aplati provenant de l'autre minimum.

La forme obtenue pour A se prêterait à des développements d'analyse tout à fait analogues à ceux des surfaces minima, l'équation aux dérivées partielles des gouttes smectiques s'obtenant sans difficulté. Leur extrême petitesse rend les vérifications quantitatives de cette théorie fort aléatoires.

GÉOLOGIE. — *Sur la succession et la répartition des unités tectoniques du versant méditerranéen des Cordillères bétiques entre Grenade et Gibraltar.* Note de M. **Maurice Blumenthal**, présentée par M. Pierre Termier.

Ayant exposé quelques observations qui éclairent les rapports des complexes bétiques de Malaga et de Grenade [1], je crois légitime de tenter de

(1) *Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 1059, et **188**, 1929, p. 69.

donner un aperçu des unités de la chaîne bétique et de leur répartition, en utilisant les résultats de ma dernière campagne (1928).

Une coupe le long du versant méditerranéen montre de l'Est à l'Ouest à partir de la culmination principale et rangées tectoniquement de bas en haut : les éléments probablement penniques de la Sierra Nevada, encore fort peu connus; ils sont suivis des nappes à Trias alpin (Alpujarrides). L'abaissement axial du Pennique vers l'Ouest, qui est de 35° environ, affecte aussi les nappes triasiques; cela est mis en évidence par les travaux de l'École de Delft. Mais leur unité principale (nappe de Lanjaron) se redresse au delà de la dépression transversale qu'occupe la vallée du Rio Guadalfeo, et s'élève pour former un palier longitudinal correspondant à la Sierra Tejeda. Puis cette nappe de Lanjaron s'abaisse de nouveau avec la même inclinaison axiale (35°), pour disparaître près d'Alcaucin sous le Bétique de Malaga. Tout le centre de la province de Malaga correspond au large développement de cette masse paléozoïque dont l'épanouissement est sûrement dû à une dépression transversale du soubassement.

Le caractère charrié d'un si puissant complexe situé si près de la Méditerranée peut être mis en question, mais lorsque l'on constate que, de l'autre côté de la Hoya de Malaga, les *unités à faciès alpin réapparaissent sous le Bétique de Malaga dans un état de métamorphisme qui les faisait ranger jadis dans le « Primitif »*, l'idée du charriage ne peut plus être rejetée. Au delà de ces anticlinaux calcaréo-dolomitiques (Sierras de Mijas, Cártama, Blanca, etc.), le Bétique malaguais reprend son inclinaison vers l'Ouest-Sud-Ouest. L'ennoyage du Paléozoïque sous le Tertiaire oligocène (Flysch) entre Estepona et Gaucin est déjà connu; les contours en sont jalonnés par des restes de son revêtement secondaire et préoligocène, composé de Néocomien (Gaucin) et d'Éocène (dolomies et calcaires blancs, ailleurs, des Alvéolines).

La grande extension du Flysch formant dans la région Rio Guadiaro-Gibraltar un rentrant vers l'axe des Cordillères et son prolongement dans le Rif, dessine, par cette répartition, la charnière qui s'intercale entre la courbure d'un arc bétique malaguais et son pendant du côté de l'Afrique.

Quittant la direction longitudinale, faisons une coupe selon la transversale de la Serrania de Ronda qui représente dans la partie centrale une culmination transversale.

Aux schistes du Bétique se substituent largement, ici, des intrusions basiques (péridotites). L'empilement des unités que nous venons de parcourir dans la longitudinale se dégage clairement. Les éléments à faciès

alpin du Trias formant l'arête principale réapparaissent sous le Bétique *s. str.* C'est ici que, pour la première fois, j'ai pu les identifier comme Trias supérieur par une petite faunule de Rhynchonelles. Il importe de noter que les calcaires triasiques étant métamorphisés localement par les roches intrusives, celles-ci doivent être post-triasiques et non hercyniennes comme le supposait D. de Orueta (1).

Du fait de l'ennoyage de Gaucin, les plis secondaires (le Pénibétique) du bord nord du Bétique, bousculés par la masse paléozoïque, ont pu être reconnus ici comme formant le revêtement par endroits très incomplet du Bétique malaguais. Cette couverture secondaire s'attache à son noyau primaire à la manière d'un grand capuchon frontal qui reprend plus au Nord des allures de nappe indépendante.

Ainsi se présente la zone d'Antequera (Trias germanique) qui, à son tour, chevauche des éléments subbétiques.

Vers le Sud-Ouest, le Pénibétique suit dans les grandes lignes les contours de sa base bétique. Vers l'Est, la chaîne entre le Chorre et Loja représente le capuchon pénibétique; le chevauchement de ces plis sur des éléments bétiques n'est pas admissible (2); tout au plus un faible décollement peut-il avoir eu lieu.

En suivant cet élément pénibétique vers l'Est-Nord-Est nous avons regagné le bassin de Grenade où les rapports qui unissent le Bétique de Malaga aux éléments de la transversale de la Sierra Nevada ont été déjà exposés (3). Ce bref coup d'œil nous a conduits à travers des unités qui s'enracinent du côté de la Méditerranée, sans qu'on puisse toutefois y reconnaître des racines comme dans les Alpes. Quant au Subbétique, les preuvent décisives manquent encore pour préciser s'il provient du même domaine, auquel cas il serait en continuation directe avec le Pénibétique, ou s'il s'enracine sous le Bétique non loin de la zone où il gît.

---

(1) Domingo de Orueta, *Estudio geologico y petrografico de la Serrania de Ronda* (*Mem. Inst. geol. de España*. Madrid, 1917, p. 153).

(2) Considérations générales de l'auteur et observations de M. P. Fallot concernant le Torcal.

(3) *Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 1059, et **188**, 1929, p. 69.

BOTANIQUE — *Sur un endophyte de* Lunularia cruciata (*L.*) *Dumortier.* Note de M. G. **Nicolas**, présentée par M. Molliard.

Ayant signalé, en janvier 1924 ([1]), à peu près en même temps que M[lle] Ridler ([2]) en Angleterre, l'existence d'un endophyte dans le thalle de *Lunularia cruciata* (L.) Dumortier, fait déjà mentionné incidemment par Gallaud, en 1902, et essayant d'établir une relation entre la présence du champignon et la sexualité de l'Hépatique, j'ai découvert, en novembre 1924, dans la cour du laboratoire de Botanique de la Faculté des Sciences de Toulouse, émargeant des thalles de *Lunularia*, une petite Pézize à hyménium orangé vif, mesurant 4-5^{mm} de diamètre, dont l'éminent mycologue, M. R. Maire, à qui je l'avais soumise, a fait une espèce nouvelle sous le nom d'*Humaria Nicolai* ([3]). Depuis la fin de 1924, je retrouve tous les ans, de novembre à janvier, quelques périthèces de cette Pézize dans la même station, au milieu des thalles de *Lunularia* ([4]).

Frappé par la localisation de l'*Humaria* dans le lieu d'où provenaient les *Lunularia* où j'avais trouvé un endophyte, j'eus naturellement l'idée de l'existence d'une relation entre ces deux organismes.

Les thalles de *Lunularia* croissant dans le voisinage des Pézizes, dans un rayon de 2-3^{cm}, contiennent toujours un mycélium large, cloisonné, formant la plupart du temps une bande dans la nervure, quelquefois de petits paquets disséminés dans tout le thalle, sauf dans le tissu chlorophyllien de la face supérieure, qui est toujours respecté.

D'autre part, le mycélium endophyte de l'Hépatique présente de très grandes analogies avec le mycélium saprophyte de l'*Humaria*, tous deux sont cloisonnés, larges :

([1]) G. Nicolas, *Formations mycorhiziques dans une Hépatique à thalle* (*Comptes rendus*, **178**, 1924, p. 228).

([2]) M[lle] Ridler, *The Fungus present in* Lunularia cruciata (*L.*) *Dum.* (*Trans. British mycol. Soc.*, **9**, 1923, p. 111).

([3]) R. Maire, *Études mycologiques* (*Bulletin de la Société mycologique de France*, **40**, 1924, p. 313-315).

([4]) G. Nicolas, Humaria Nicolai *Maire*, *Nouvelle Pézize vivant parmi les thalles de* Lunularia (*Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse*, **56**, 1927, p. 111-112).

	Endophyte de *Lunularia*.	Saprophyte d'*Humaria*.
Largeur........................	$7^{\mu},5-12^{\mu},5$	10^{μ}

Des cultures sur gélose, faites en partant de fragments de thalles contaminés, avec toutes les précautions voulues, ne m'ont rien donné.

Malgré cet insuccès, la localisation de la Pézize dans une toute petite station, au milieu de *Lunularia*, la présence constante d'un endophyte dans les thalles voisins de la Pézize et l'identité entre les deux mycéliums semblent des arguments suffisants pour admettre que l'endophyte de *Lunularia* et *Humaria Nicolai* ne font qu'un, autrement dit que c'est le mycélium d'*Humaria* qui infecte les thalles de *Lunularia* où il vit en endophyte.

Ce qui précède ne s'applique qu'à la station que j'ai étudiée, où croît *Humaria Nicolai*. D'autres champignons peuvent vraisemblablement vivre en endophyte dans *Lunularia*. Ainsi, il n'est pas rare d'observer un ou plusieurs filaments mycéliens cloisonnés, très ténus, dans les rhizoïdes lisses de *Lunularia* et quelquefois même dans le thalle, mais rarement, un mycélium semblable, probablement en rapport avec celui des rhizoïdes. De même l'endophyte de *Lunularia* étudié par Mlle Ridler serait un *Phoma*, tout au moins d'après les cultures que cet auteur a obtenues en partant de fragments de thalle contaminés, car ses essais de contamination de *Lunularia* sont restés négatifs.

Le cas du *Fegatella* est intéressant à citer au même point de vue. Pour Cavers et Beauverie, le mycélium de l'endophyte est cloisonné et appartient, d'après Beauverie, à un *Fusarium*, tandis que celui que j'ai toujours observé dans la même Hépatique est siphoné, comme celui qu'indique Bolleter. Ces dernières remarques semblent bien démontrer que la même Hépatique peut s'associer à des champignons de natures différentes, ce qui n'a rien qui doive surprendre étant donné le mode de vie de ces petites plantes.

AGRONOMIE. — *Influence du relief du sol sur la fertilité.* Note [2] de M. N.-N. **Kourtiakoff**, présentée par M. Schlœsing.

On estime assez communément, en Ukraine méridionale, que dans les dépressions des sols cultivés les rendements des récoltes sont plus forts que

---

[1] Séance du 2 janvier 1929.

[2] Résumé d'un Mémoire reçu en la séance du 16 avril 1928.

dans les parties les plus hautes, et le fait est attribué à ce que l'humidité se trouve, dans les dépressions, plus prononcée.

Mais il arrive aussi que le contraire s'observe, c'est-à-dire que les rendements soient inférieurs dans les dépressions. La constatation et l'explication de ce second fait ont été l'objet de mes recherches. dans l'été de 1926, à l'Institut d'agriculture d'Odessa.

J'ai d'abord déterminé l'humidité du sol sur des échantillons pris en divers points et en diverses profondeurs entre $0^m,1$ et 1^m, dans la dépression étudiée. Je ne rapporterai ici que les chiffres relatifs à l'un des versants de la dépression (versant oriental); les 7 points de prise d'échantillons étaient distants les uns des autres de 3 sagènes (1 sagène égale à $2^m,13$), le premier (I) au bord de la dépression, le septième (VII) au fond. J'ai trouvé : humidité moyenne entre $0^m,1$ et 1^m de profondeur, pour 100 de terre sèche

I.	II. III. IV. V.	VI.	VII.
19,5	de 21 à 21,7	23,0	24,7

Ces chiffres vérifient l'accroissement de l'humidité moyenne, entre $0^m,1$ et 1^m de profondeur, dans les parties plus basses de la dépression.

Ensuite j'ai cherché quel pourrait être l'effet du lavage de la terre par les pluies sur la présence des carbonates. Dans ce but, j'ai déterminé à quelle profondeur apparaissaient les carbonates en divers points de la dépression ci-dessus, cette profondeur étant en chaque point celle où les échantillons de terre, pris successivement à partir de la surface, commençaient à faire effervescence avec un acide. Les 9 points, de 1 à 9, où étaient prélevés les échantillons, s'alignaient dans un même plan vertical coupant les deux pentes de la dépression, de 1 à 5 la pente étant descendante et de 5 à 9 montante. Les distances entre les points étaient : dans chacun des intervalles 1 à 2, 2 à 3, 3 à 4 et 4 à 5, 3,5 sagènes; de 5 à 6, 4 sagènes; de 6 à 7, 18 sagènes; de 7 à 8, 26 sagènes; de 8 à 9, 6 sagènes. Les profondeurs auxquelles ont commencé à se montrer les carbonates ont été :

	m		m
En 1................	0,50	En 6................	1,91
En 2................	0,56	En 7................	1,20
En 3................	0,71	En 8................	0,90
En 4................	1,70	En 9................	0,90

En 5, au fond de la dépression, les carbonates n'apparaissent pas encore à 4^m de profondeur.

J'ai pensé que l'abaissement du calcaire au-dessous de la surface pouvait

influer sur les récoltes. Pour le savoir, j'ai divisé une culture d'orge de printemps, installée sur la dépression, en 320 parcelles de 1 × 1 sagène et j'ai déterminé le rendement de chacune de ces parcelles. Puis j'ai calculé le rendement moyen des parcelles de même cote, en distinguant 16 cotes (1 dans le fond, 16 sur le plateau). J'ai obtenu les résultats ci-après.

Rendement en pouds (1 poud égale 16kg,38) aux différentes cotes.

1.......	98,6	5.......	109,8	9.......	126,8	13.......	115,4
2.......	101,6	6.......	105,0	10.......	131,1	14.......	116,1
3.......	105,2	7.......	126,9	11.......	114,6	15.......	124,1
4.......	114,0	8.......	121,5	12.......	150,2	16.......	157,7

Les rendements ont été plus faibles sur les parcelles situées plus bas.

On conclut que, dans les dépressions d'un champ, il arrive bien réellement que les récoltes soient diminuées. Dans le cas cité, la diminution a été en relation avec l'abaissement du niveau des carbonates au-dessous de la surface; elle peut assez vraisemblablement être imputée à cet abaissement.

Il y a là des faits susceptibles de présenter une certaine généralité.

AGRICULTURE. — *La chlorose des cultures en terrain d'épandage; sa cause et son remède.* Note (1) de MM. **P. Mazé** et **P. Evens**, présentée par M. Calmette.

Les cultures en terrain d'épandage sont fréquemment atteintes de chlorose, mais sur des espaces relativement restreints et toujours les mêmes.

En ces endroits, la terre est brûlée, disent les cultivateurs. Cela signifie qu'elle est trop chargée en substances extractives empruntées au liquide d'épandage.

Les taches correspondent en effet à de légères dépressions du sol. On doit donc considérer ces cuvettes peu visibles comme facteur déterminant plus ou moins médiat de la maladie.

Toutes les cultures ne sont pas atteintes avec la même intensité. Les petits pois, les haricots, les carottes, les choux, les poireaux, les oignons, les artichauts, les pommes de terre, sont les plus sensibles, le troène lui-même n'est pas épargné. Les graminées en sont exemptes. Il ne s'agit donc

(1) Séance du 2 janvier 1929.

pas d'une maladie parasitaire spécifique, mais d'une cause permanente résultant des conditions de végétation défavorables.

Quand on examine les pieds malades, spécialement les haricots et les petits pois, on constate que le lacis des nervures tranche par sa couleur verte sur le fond jaune clair du parenchyme. On en déduit qu'il s'agit sûrement d'une chlorose d'origine alimentaire due à une pénurie de fer ou de soufre.

La maladie ne rétrograde jamais spontanément; elle s'aggrave avec l'âge de la plante et réduit considérablement la récolte, quand elle ne l'anéantit pas, sur une étendue qui peut atteindre plusieurs mètres carrés.

L'aspect du sol ne révèle rien de particulier en dehors de la légère dépression déjà mentionnée et la plante ne porte aucune lésion attribuable à la présence d'un parasite quelconque.

Il n'y avait qu'à faire l'épreuve de la pénurie probable de fer ou de soufre en pulvérisant sur les feuilles une solution de perchlorure de fer à 1^{g} par 20^{l} et une solution de sulfate d'ammoniaque à la même concentration.

C'est un des fermiers de la plaine d'Achères qui fut chargé du travail, afin de l'inciter à mieux exercer ses fonctions de juge intéressé. Il traita avec chacune des solutions quelques pieds de choux parmi les plus gravement atteints.

Au bout de quelques jours, les résultats furent nettement visibles. Les pieds qui avaient reçu la solution de perchlorure de fer verdirent et se développèrent normalement. Ceux qui avaient reçu la solution de sulfate d'ammoniaque restèrent chlorotiques, et dépérirent comme les témoins.

Le cultivateur n'en demanda pas plus pour généraliser le traitement; mais au lieu de recourir à la pulvérisation, il répandit, au cours d'un binage, 200^{kg} par hectare, de sulfate de fer en neige sur un sol qui venait d'être planté de poireaux. Sa récolte fut magnifique, aucune tache de chlorose ne se montra dans les endroits où la maladie aurait infailliblement sévi comme auparavant.

L'explication se présente maintenant d'elle-même.

L'eau d'épandage est riche en carbonate de chaux; elle est donc pauvre en fer et en revanche, riche en soufre organique et en sulfures solubles.

C'est une eau incrustante; elle colmate par évaporation les particules terreuses d'une couche de carbonate de chaux d'autant plus abondante que l'évaporation est plus active, condition réalisée surtout dans les endroits déprimés où le plan d'eau souterraine est plus près de la surface.

Pour absorber le fer insoluble, les racines doivent donc solubiliser d'abord la couche incrustante de calcaire, et dissoudre ensuite les traces de fer retenues par les particules terreuses.

C'est un travail chimique que les graminées peuvent réaliser dans tous les sols, en raison de la forte acidité des excrétions de leurs racines, mais que beaucoup d'espèces cultivées ne peuvent faire parce que leurs excrétions radicales peuvent être alcalines en terrain calcaire; elles deviennent donc chlorotiques par pénurie de fer, bien que cet élément soit parfois très abondant dans le sol (1).

Mais il est facile de guérir ou de prévenir le mal. Le meilleur moyen d'assurer une guérison rapide consiste à pulvériser sur les feuilles une solution de sulfate de fer à 1^g par 10^l. Les plantes reverdissent en deux ou trois jours, et si le sol est riche en éléments fertilisants, la végétation évolue vigoureusement.

Les feuilles élaborent alors assez d'acides organiques pour neutraliser l'excès de calcaire apporté par la sève brute, et pour acidifier les excrétions radicales. Un seul traitement assure par conséquent une récolte abondante.

L'incorporation au sol du sulfate de fer en neige, au moyen d'un labour soigné est un traitement préventif efficace, car il favorise aussi le départ d'une vigoureuse végétation chez laquelle les fonctions d'absorption ne seront pas mises en défaut; il ne faut pas perdre de vue pourtant que le fer incorporé au sol s'insolubilise et se trouve colmaté avec le temps. On devra donc recourir à la pulvérisation des feuilles, dès l'apparition du moindre symptôme de chlorose.

HISTOPHYSIOLOGIE. — *Sur l'existence d'une spécialisation morphologique au niveau du pôle vasculaire du glomérule rénal chez la grenouille.* Note de M. **Harald Okkels**, présentée par M. F. Mesnil.

I. Au cours de recherches antérieures sur l'histophysiologie du rein des Batraciens, j'ai pu constater que l'appareil glomérulaire chez la grenouille renferme certains éléments susceptibles de se contracter à la suite d'une irritation mécanique directe. On peut déclencher cette contraction en tou-

---

(1) P. Mazé, *Recherches de physiologie végétale* (4e Mémoire) : *Influences respectives des éléments de la solution minérale sur le développement du maïs* (*Annales de l'Institut Pasteur*, 28, 1914, p. 21).

chant le pôle vasculaire du glomérule sur le rein vivant, étudié au micromanipulateur.

Ruyter [1] a décrit au niveau de l'artériole afférente, chez la souris et le rat, des cellules particulières. Oberling [2], d'autre part, a pu démontrer l'existence d'une housse neuromusculaire au niveau des artères glomérulaires de l'homme.

J'ai tenté de retrouver chez la grenouille, au point même où l'on peut observer la réaction vitale de contraction, une disposition morphologique qui soit en rapport avec ce phénomène physiologique.

J'ai d'abord pu vérifier les constatations de Ruyter sur le rein de souris fixé par la méthode de Regaud et coloré par la méthode de Kull. Comme l'a dit Ruyter, la partie de l'artériole afférente la plus proche du glomérule est constituée par des cellules épithélioïdes, renfermant des grains assez grossiers, fortement colorables en rouge par la fuchsine.

J'ai recherché ensuite des dispositifs analogues chez la grenouille, après fixation du rein par le Regaud ou par le Helly.

Après la coloration de Kull, on constate une disposition structurale particulière au niveau du pôle vasculaire des glomérules. La musculature lisse y est remplacée par un dispositif de cellules presque cubiques, avec de gros noyaux ronds, très riches en chromatine, et munis d'un nucléole distinct. La distribution de ces cellules est assez serrée; leur aspect général semble correspondre à celui de la « housse » d'Oberling. Cependant, la coloration de Kull s'est trouvée incapable d'y déceler aucune granulation cytoplasmique.

La coloration trichromique de Masson au jaune métanile fait bien voir la housse, mais n'y révèle pas de différenciations cytoplasmiques.

Les grains existent cependant : on peut les révéler avec l'hématoxyline ferrique de Regaud. A l'aide de cette méthode, j'ai pu observer, dans le cytoplasme des cellules de la housse, des granulations nettes, noires, d'une taille beaucoup plus réduite que celles de la souris; ces grains sont souvent disposés d'une manière linéaire. Les cellules d'une même housse renferment des quantités variables de grains. Quelquefois il existe des cellules sem-

---

(1) Ruyter, *Ueber einen merkwürdigen Abschnitt der Vasa afferentia in der Mauseniere* (*Zeit. f. Zellforsch. u. mikr. Anat.*, 2, 1925, p. 242).

(2) Oberling, *L'existence d'une housse neuromusculaire au niveau des artères glomérulaires de l'homme* (*Comptes rendus*, 184, 1927, p. 1200).

blables isolées dans le glomérule même, dans la zone de transition, entre l'artériole et les anses capillaires propres.

Une coloration ordinaire à l'hématoxyline-éosine ne peut déceler cette structure.

Ainsi il existe dans le glomérule rénal de la grenouille, au niveau du pôle afférent, un dispositif morphologique particulier, en rapport avec une fonction de contraction; cette contractilité peut être mise en évidence par excitation mécanique directe de ce dispositif.

BIOLOGIE GÉNÉRALE. — *Sur les réactions des êtres vivants groupés. Action de quelques alcaloïdes sur* Convoluta Roscoffensis. Note (1) de M. **J. André Thomas**, présentée par M. A. Desgrez.

Les êtres vivants groupés dans l'eau réagissent d'une façon profondément différente parfois des êtres isolés. Cette notion semble avoir une importance considérable en Biologie générale. Depuis les travaux de Anna Drzewina et Georges Bohn (2), plusieurs auteurs ont retrouvé ces « effets de masse » (Robertson, Bilski, P. N. Pawlow, Lota Dehorne et Morvillez, Hinrichs, et tout spécialement Allee). Nous avons recherché méthodiquement ce rôle du groupement des individus dans l'étude des actions de quelques alcaloïdes sur *Convoluta Roscoffensis*, réactif d'une sensibilite remarquable, mais dont les résistances individuelles sont quelquefois fort inégales. Toutes nos séries d'expériences ont été faites simultanément en petites boîtes de Petri (10^{cm^3} de solution avec moins de 100 *Convulata*) et en verres de montre (2^{cm^3} et plus de 10 fois plus d'individus) en présence de témoins.

Les alcaloïdes furent : chlorhydrate d'adrénaline (solution du commerce) et chlorhydrate d'éphédrine; sulfate d'atropine et bromhydrate de scopolamine; chlorhydrate de pilocarpine; sulfate de strychnine; à des concentrations dans l'eau de mer de 10 en 10 fois moins considérables; les extrêmes étant 10^{-2} et 10^{-8}.

1. Aux concentrations fortement toxiques, l'intoxication (ralentissement, contraction, rejet d'algues) est progressive jusqu'à la mort.

(Atropine 10^{-3} 7 heures, 10^{-4} 1 jour. — Scopolamine 10^{-3} un peu plus d'un jour.—

(1) Séance du 26 décembre 1928.

(2) G. Bohn et A. Drzewina, *Nouvelles recherches sur les effets de masse dans les agglomérations animales. C. R. Soc. Biol.*, 99, xxxiii, 17 novembre 1928, p. 1567, et : *Les Convoluta* (*Ann. Sc. Nat. Zoologie*, 11, 1928, p. 259-398).

Pilocarpine 10^{-2} 2-3 heures. — Strychnine 10^{-3} 5 heures; en boîte de Pétri.) Elles ne résistent de même que quelques heures à l'éphédrine 10^{-2} et 10^{-3} et plus de 2 jours à 10^{-4} (arcs et cercles tournant sur eux-mêmes).

Il n'en est pas de même en verre de montre. Les effets de groupement se manifestent alors dans des sens différents, s'inversant le plus souvent.

Elles vivent ou non quelques heures de plus dans l'atropine à 10^{-3}; elles sont peu ou pas ralenties à 10^{-4} mais meurent plus rapidement. De même dans la scopolamine 10^{-3}. Elles meurent encore plus rapidement qu'en boîte dans la strychnine 10^{-3}, formant un agglutinat visqueux, dans lequel elles succombent du centre à la périphérie. Par contre à 10^{-4} (cytolyse des corps, les têtes libérées survivant seules) l'effet de groupement commence faiblement ou non à se manifester. Mais dans l'éphédrine 10^{-3} elles restent excitées, subissent une perte d'algues importante (complète en coupelle) et vivent près de 4 fois plus longtemps tandis qu'à 10^{-4} elles ne survivent pas (probablement cette fois à cause des produits toxiques libérés, l'expérience durant plus de 2 jours).

2. Les *Convoluta* sont généralement peu modifiées dans les concentrations très faibles d'alcaloïdes et y vivent plusieurs jours.

On peut cependant observer (atropine et strychnine 10^{-6}) un léger effet de groupement : les individus des boîtes étant un peu ralentis et contractés, ceux des verres restant normaux. Parfois au contraire (adrénaline 10^{-5}, 10^{-6}) une très légère inversion de ce facteur.

3. Mais, il existe dans l'échelle des concentrations de certains alcaloïdes une zone optima plus ou moins étendue, où les effets de groupement jouent généralement d'une façon heureuse pour l'individu (adrénaline et scopolamine 10^{-4}, éphédrine, atropine, strychnine 10^{-5}). A cette concentration correspond précisément pour les êtres une possibilité de lutter contre la variation, de redevenir normaux après un temps assez long parfois et de le rester presque jusqu'à la mort.

Dans l'éphédrine les *Convoluta* restent plus actives qu'en boîte. Dans l'atropine de même, la forme et le comportement étant bientôt restaurés; même dans les cas où l'intoxication est continue en boîte. Dans la scopolamine et la strychnine elles sont normales, en masse, ralenties et contractées en dilution. A cette concentration l'adrénaline (pH 6,8) est peu toxique et les différences sont peu importantes. Mais si l'on tamponne la solution à pH 8,2 (eau de mer) la toxicité est beaucoup plus considérable [1]. Elles meurent en 7 heures en boîte de Petri, et sont encore normales le cinquième jour en verre de montre.

---

[1] Ce fait est en accord avec les observations de Labès (1923) : la toxicité d'un alcaloïde augmente avec le pH. [D'après M. et L. Pétrunkine, *Sur les conditions de la combinaison de la gélatine avec les alcaloïdes et autres bases* (*Arch. Sc. Biol. Leningrad*, **27**, 1927, p. 219-234).]

Par contre, avec la pilocarpine, l'inversion de l'effet de groupement n'existe pas seulement aux concentrations toxiques : il est constant.

A 10^{-3} (bords irréguliers présentant des hernies volumineuses), les *Convoluta* résistent 1 ou 2 jours en boîte, beaucoup moins longtemps en verre (2 heures quelquefois). De 10^{-4} à 10^{-8} elles demeurent à peu près normales en boîte. Elles sont beaucoup plus atteintes en verre où elles forment jusqu'à 10^{-7} un agglutinat volumineux et dense (comme dans le cas de KCl et RbCl), la mort survenant par voie centrifuge, comme ou plus rapidement qu'en boîte à 10^{-4}, plus rapidement ou plus tardivement au seuil 10^{-5} où elles commencent à réagir contre le toxique. Mais il faut atteindre 10^{-8} pour voir disparaître la tendance à l'agglutination et les altérations du comportement. Car à 10^{-6} et 10^{-7} les individus s'agglomèrent fortement et longtemps puis se désagrègent et redeviennent normaux.

Sur verre paraffiné les réactions sont le plus généralement différentes soit que les *Convoluta* vivent plus longtemps (atropine 10^{-4}, pilocarpine, 10^{-3}), soit qu'elles soient modifiées dans leur comportement.

Des modifications importantes des réactions des êtres existent donc du fait de leur groupement; il semble que dans le cas du réactif convoluta-alcaloïdes, les réactions des individus massés s'amorçant soit dans un sens, soit dans un autre, en fonction de la concentration du toxique et de sa nature (l'hydroquinone, 10^{-5} que nous avons expérimentée un grand nombre de fois donne par exemple des « effets de protection » d'une netteté admirable), on puisse surtout penser, comme le font Bohn et Drzewina, à une action par contact, à une catalyse dont l'effet dépendrait des constituants en présence.

BIOLOGIE PHYSICO-CHIMIQUE. — *Production de rayons X monochromatiques de grande longueur d'onde. Action quantique sur les microbes.* Note [1] de M. F. **Holweck**, présentée par M. J. Perrin.

Nous avons étendu la méthode précédemment employée à la production des rayons K de Al (8 Å) [2] aux rayons L de Ag (4 Å env.). A cet effet le tube Coolidge a été muni d'une anode d'Ag et la fenêtre de sortie a été constituée par une feuille d'Ag de 5^{μ} d'épaisseur, l'étanchéité étant assurée par une feuille de cellophane de 20^{μ}.

---

(1) Séance du 26 décembre 1928.

(2) *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1203.

Sous quelques réserves, que nous préciserons ultérieurement, le rayonnement qui sort du tube, alimenté en courant continu 4500 volts, est bien monochromatique et a une longueur d'onde de 4 Å. Le coefficient d'absorption de ces rayons dans l'air est exactement 8 fois plus petit que celui relatif à K de Al.

Avec des rayons X de 4 et 8 Å nous avons irradié des microbes disposés de telle façon que la mortalité résultant de l'irradiation soit directement mesurable selon une technique décrite dans la Note suivante de Lacassagne.

Connaissant l'intensité du rayonnement sortant de la fenêtre mince du tube, le coefficient d'absorption des rayons dans la substance du microbe, la distance des microbes à la fenêtre de sortie ainsi que l'angle solide du faisceau émergeant, on peut calculer facilement combien de quanta par seconde sont absorbés par chaque unité de volume.

D'autre part, une méthode classique de calcul des probabilités, utilisée déjà par plusieurs physico-biologistes pour expliquer l'action des rayons X pénétrants sur de petits organismes (œufs de mouches, *colpidium colpoda*, etc.) (¹) et que nous avons employée aussi, donne comme valeur du nombre des survivants :

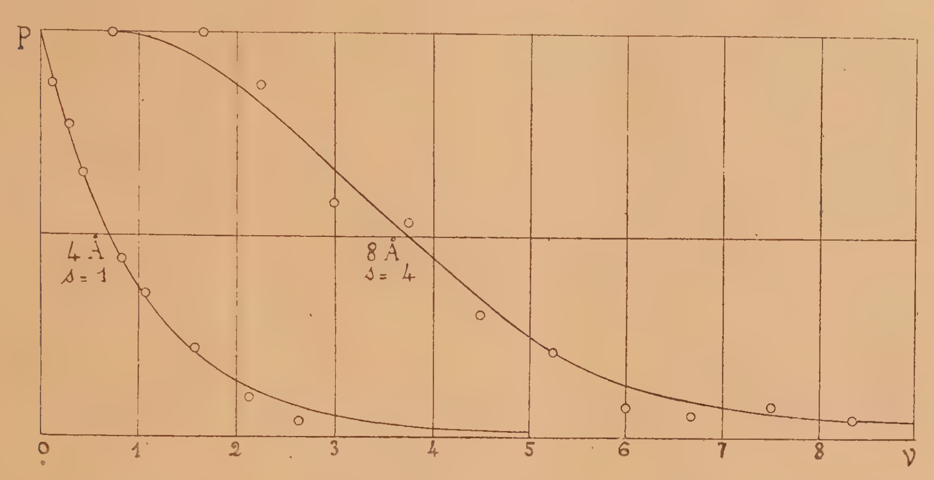
$$P = e^{-N}\left(1 + N + \frac{N^2}{2\,!} + \frac{N^3}{3\,!} + \ldots + \frac{N^{s-1}}{(s-1)\,!}\right),$$

expression dans laquelle N est le nombre de quanta absorbés par unité d'un certain volume u, petit devant celui du microbe et appelé *zone sensible* et s le nombre de quanta qui, absorbés dans cette zone sensible, sont nécessaires pour tuer. Nous avons tracé le réseau de courbes $P = f(N)$ pour $s = 1$, $s = 2$, etc. et nous avons essayé d'y superposer les courbes expérimentales de mortalité du B. pyocyanique irradié par des rayons de 4 et de 8 Å. La figure représente le résultat de cette comparaison, la courbe théorique étant tracée en trait plein et les points ronds étant les points expérimentaux provenant d'une statistique sur 300 microbes environ (²). La coïncidence est bonne. Lorsqu'on irradie du B. pyocyanique au moyen de rayon de 4 Å, le nombre des survivants décroît en raison exponentielle de la dose, ce qui signifie *qu'un seul quantum* est suffisant pour tuer ($s = 1$). On en déduit

(¹) Crowther, *Proc. Roy. Soc.* (B), 1926, *c*, p. 390. — Condon et Terrill, *J. Cancer Res.*, 2, 1927, p. 324.

(²) Mme Curie propose dans une Note suivante une méthode plus élégante pour la détermination de u et de s.

immédiatement le diamètre de la zone sensible (supposée unique et sphérique) et l'on trouve $d = 0^{\mu},43$. Le trajet du photoélectron résultant de l'absorption du quantum est petit devant d ($0^{\mu},12$). Lorsqu'on utilise des rayons de 8 Å, quatre quanta au moins sont nécessaires pour tuer le même bacille ($s = 4$) et ils doivent être absorbés dans la zone sensible qui, dans ce cas, a un diamètre de $0^{\mu},55$; d très petit est de $0^{\mu},02$ [1].



On voit de suite la complexité de la variation de l'action bactéricide des radiations en fonction de la longueur d'onde et la nécessité de considérer plusieurs domaines distincts. Dans un premier domaine ($s > 1$) plusieurs quanta et quelquefois un grand nombre sont nécessaires pour tuer (cas de l'UV et des rayons X très mous), dans un deuxième domaine ($s = 1$) un seul quantum est suffisant et la loi de mortalité est exponentielle. Daus ces deux premiers cas, le trajet du photoélectron est petit devant le diamètre de la zone sensible. Dans un troisième domaine, le trajet du photoélectron est plus grand que la zone sensible (rayons X pénétrants) et la loi se complique à nouveau.

---

(1) On trouvera dans la Note suivante de Lacassagne une représentation schématique à l'échelle, des bacilles dans leurs champs d'irradiation. Le bacille utilisé a la forme d'un bâtonnet de $0^{\mu},7$ de diamètre et de 4^{μ} de longueur.

BIOLOGIE PHYSICO-CHIMIQUE. — *Action des rayons X de grande longueur d'onde sur les microbes. Établissement de statistiques précises de la mortalité des bactéries irradiées.* Note [1] de M. **A. Lacassagne**, présentée par M. Jean Perrin.

Dans nos premières recherches, on appréciait le degré d'action des rayons sur un microbe par l'opacité de la culture, au niveau des champs irradiés après ensemencement, sur une boîte de gélose [2]. Par ce procédé, nous n'arrivions qu'avec une grande imprécision à l'évaluation de la sensibilité des microbes pour différents temps d'exposition, en raison du nombre très élevé et inconnu d'individus initialement existant. Dans ces conditions, on ne pouvait raisonnablement vérifier aucune loi de probabilité.

Nous avons depuis progressivement amélioré nos conditions expérimentales, dans le but d'obtenir une numération des microbes irradiés permettant de tracer la courbe de leur mortalité en fonction de la dose de rayonnement.

Technique actuelle. — Nous nous sommes servis d'une même bactérie, le *Pyocyanique S* de la collection de l'Institut Pasteur. Chaque jour, on ensemence un tube contenant 5^{cm^3} de bouillon, au moyen d'une anse de platine d'une culture ayant séjourné 24 heures à l'étuve à 37°. On laisse à l'étuve pendant 3 heures.

On fait alors des dilutions avec deux gouttes et quatre gouttes de la culture de 3 heures, dans 2^{cm^3} d'eau distillée. Après avoir vigoureusement agité, on couvre, à la pipette, la surface de la gélose d'une boîte de Petri avec chacun de ces liquides dont l'excès est soigneusement réaspiré. Le but est d'obtenir, à la surface du milieu de culture, une répartition homogène de bactéries isolées qui donneront naissance à des colonies distinctes, facilement numérables, mais cependant suffisamment nombreuses pour qu'un champ de 10^{mm} de diamètre (dimension de la fenêtre de sortie des rayons) en contienne environ une centaine. Ce but sera habituellement atteint sur l'une ou l'autre des deux boîtes ensemencées.

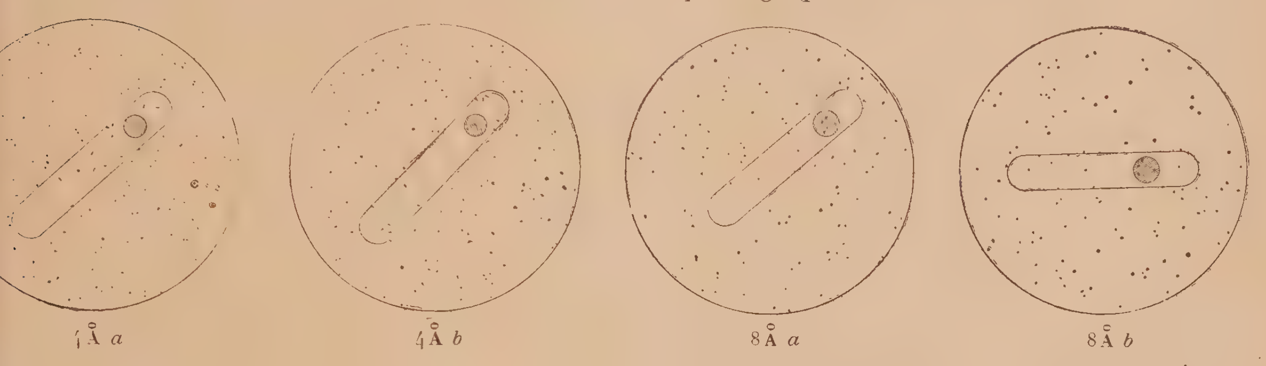
Celles-ci sont irradiées dans les mêmes conditions. On assure une distance constante entre la fenêtre de sortie et la surface de la gélose, en prenant comme repère géométrique le bord supérieur de la boîte de Petri

---

[1] Séance du 26 décembre 1928.

[2] *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1316.

qui entre en contact avec le tube producteur de rayons; les boîtes utilisées ont été rodées sur un plan de façon à présenter la même profondeur (vérifiée d'ailleurs avec une jauge précise) et elles contiennent toutes une égale quantité de gélose. Sur chaque boîte, on expose à l'action des rayons une série de champs (habituellement 8) pendant des temps croissants de 10 à 150 secondes. On laisse ensuite à l'étuve, pendant le temps nécessaire pour que les colonies deviennent apparentes à la loupe; il est alors facile de compter leur nombre sur les champs irradiés et sur des champs témoins en se servant, par exemple, d'un appareil à microphotographie.



4 Å *a* 4 Å *b* 8 Å *a* 8 Å *b*

Discussion. — Il importe que chacune des colonies numérées soit le produit de l'ensemencement par une unité microbienne et non par un amas ou une chaînette de plusieurs bactéries. La technique qui vient d'être décrite semble donner satisfaction à ce point de vue. En effet, l'examen microscopique des liquides utilisés pour l'ensemencement, pratiqué soit à l'état frais, soit sur préparations colorées, établit que les bactéries s'y présentent pour la plupart isolées les unes des autres.

Une autre cause d'erreur pourrait provenir de la multiplication immédiate des bactéries ensemencées, se produisant au cours des 10 à 15 minutes qui séparent le moment de l'ensemencement des moments où les divers champs sont soumis à l'irradiation. Nous avons pu nous rendre compte que cela ne se produisait pas à la température du laboratoire, dans les conditions où nous opérions. En effet, deux boîtes ont été ensemencées simultanément avec le même liquide; l'une d'elles a été irradiée immédiatement, l'autre ne l'a été qu'après un intervalle d'une demi-heure : les résultats des numérations ont fourni des chiffres absolument concordants.

Répartition figurée des quanta dans une bactérie. — Nous référant aux données numériques de la Note ci-dessus d'Holweck, nous figurons schématiquement la répartition des quanta dans des champs d'irradiation sup-

posés constitués d'une substance ayant même coefficient d'absorption que le bacille qui y est contenu; et ceci pour les deux longueurs d'onde employées, 4 et 8 Å; le nombre des quanta absorbés par millimètre cube, ou autrement dit la dose reçue, correspond dans les deux cas à un quantum moyen par zone sensible de bacille, celle-ci étant figurée à l'échelle par un cercle hachuré. Pour chaque longueur d'onde, nous avons représenté deux bactéries (longueur 4^{μ}, largeur $0^{\mu},7$), l'une ayant eu de la chance et n'ayant pas de quantum absorbé dans sa zone sensible (*a*), l'autre n'ayant pas eu de chance et ayant absorbé la dose léthale (*b*).

BIOLOGIE PHYSICO-CHIMIQUE. — *Sur l'étude des courbes de probabilité relatives à l'action des rayons X sur les bacilles.* Note [1] de Mme **P. Curie.**

Cette Note est un complément théorique à l'exposé des recherches de F. Holweck et de A. Lacassagne sur l'action bactéricide des rayons X (voir ci-dessus. J'admets avec F. Holweck que, pour détruire un bacille, il est nécessaire que la *zone sensible* de celui-ci absorbe un nombre s minimum de quanta d'une fréquence déterminée; s est le *seuil* de l'effet pour une radiation donnée et un bacille donné [2]. Soient u le volume de la zone sensible, δ sa surface exposée aux rayons, a sa profondeur; si la culture reçoit x quanta par unité de surface, le nombre moyen de quanta absorbés par la zone est $\nu = \mu a \delta x = \mu u x$, où μ est le coefficient d'absorption (μu est supposé faible). La probabilité P_n pour l'absorption de n quanta et la probabilité P de survie (ou proportion de survivants) sont alors données par les formules bien connues

$$P_n = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}, \qquad P = \sum_{0}^{s-1} \frac{\nu_n e^{-\nu}}{n!}.$$

Quand $s = 1$, on trouve $P = e^{-\nu}$. En représentant $\log P$ en fonction de ν, on obtient une droite dont la pente permet de déterminer u.

Quand $s > 1$, P n'est pas une fonction exponentielle simple. En représentant P ou $\log P$ en fonction de ν pour diverses valeurs de s, on obtient une série de courbes qu'on a utilisées pour déterminer s et u, en essayant de

---

(1) Séance du 26 décembre 1928.

(2) La notion de « seuil » demande une discussion qui ne peut prendre place dans cette Note.

superposer, par changement d'échelle des abscisses, la courbe expérimentale à l'une des courbes théoriques.

Je me propose d'indiquer une méthode simple pour calculer s et u d'après la forme des courbes $P = F(x)$.

Posons

$$F(x) = \left(1 + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^p x^p}{p!}\right) e^{-\alpha x} = f_p(\alpha x)\, e^{-\alpha x},$$

où $p = s - 1$; $\alpha = \mu u$.

Formons les dérivées en remarquant que $\frac{df_p}{dx} = \alpha f_{p-1}$. On trouve

$$\frac{dP}{dx} = -\alpha e^{-\alpha x} \frac{\alpha^p x^p}{p!},$$

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = \alpha^2 e^{-\alpha x} \frac{\alpha^{p-1} x^{p-1}}{p!} (\alpha x - p),$$

$$\frac{d^3 P}{dx^3} = -\alpha^3 e^{-\alpha x} \frac{\alpha^{p-2} x^{p-2}}{p!} [\alpha^2 x^2 - 2p\alpha x + p(p-1)],$$

$\frac{d^2P}{dx^2}$ s'annulant pour $\alpha x = p$ tandis que $\frac{d^3P}{dx^3}$ s'annule pour $\alpha x = p \pm \sqrt{p}$, les courbes $P = F(x)$ présentent un point d'inflexion pour $\alpha x = p = s - 1$. Si α était connu, la détermination de ce point d'inflexion donnerait s. Toutefois, sans connaître α, on peut trouver s, en remarquant qu'au point d'inflexion

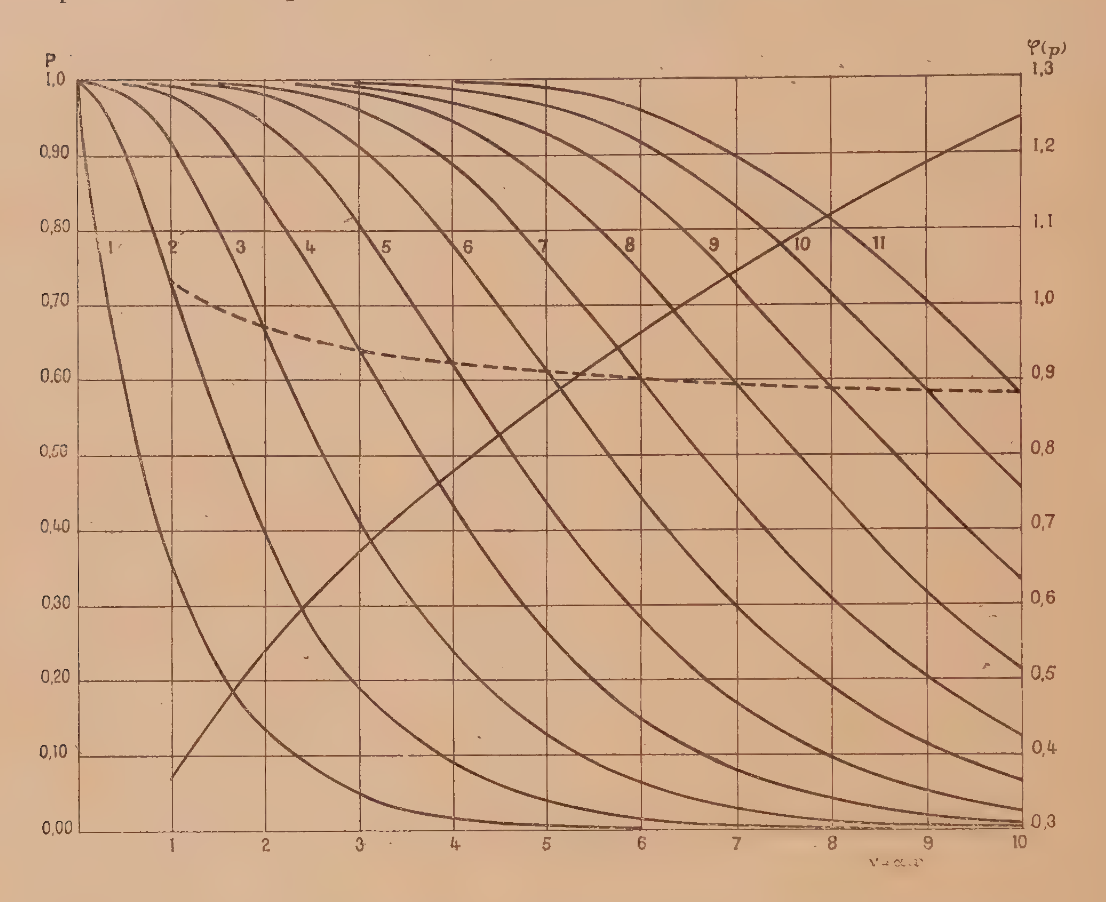
$$\frac{dP}{dx} = -\alpha e^{-p} \frac{p^p}{p!} \quad \text{et} \quad x\frac{dP}{dx} = -\frac{p^p e^{-p}}{(p-1)!} = -\varphi(p).$$

Ayant construit la courbe qui représente $\varphi(p)$ en fonction de p, nous pourrons trouver la valeur de p qui correspond à la valeur observée de $x\frac{dP}{dx}$ d'où la valeur du seuil s. Pour déterminer $x\frac{dP}{dx}$, il suffit de disposer d'une courbe qui représente la proportion des bacilles survivants en fonction du temps d'irradiation (à intensité et fréquence constante), car cette expression ne varie pas quand on multiplie x par un coefficient constant. Pour déterminer ensuite u par la relation $\mu u x = s - 1$, il est nécessaire de connaître le nombre μ de quanta absorbés par unité de volume de la culture.

La fonction $\varphi(p)$ se simplifie pour des valeurs suffisantes de p, par l'emploi de la formule de Stirling, et l'on obtient

$$\varphi(p) = \sqrt{\frac{p}{2\pi}} = \sqrt{\frac{s-1}{2\pi}}.$$

On a représenté dans la figure les courbes $P = F(\nu)$ pour quelques valeurs de s, inscrites à côté des courbes, et la courbe $\varphi(p)$. On a utilisé pour les abscisses p la même échelle que pour les abscisses ν.



Signalons enfin que l'ordonnée P du point d'inflexion est aussi une fonction de p donnée par la formule

$$P_p = \left(1 + \frac{p}{1} + \frac{p^2}{2!} + \ldots + \frac{p^p}{p!}\right) e^{-p} = \psi(p).$$

Cette fonction est représentée sur la figure par une ligne en pointillé; on voit que, sauf au début, $\psi(p)$ varie très peu avec p, et que l'emploi de la fonction φ paraît préférable.

BACTÉRIOLOGIE. — *Formation locale des antitoxines dans le liquide céphalorachidien.* Note (¹) de M. S. **Mutermilch** et Mlle E. **Salamon**, présentée par M. Calmette.

Après avoir établi que l'introduction des hématies étrangères, des vaccins microbiens et du virus rabique, directement dans la cavité méningée du lapin, détermine la production locale des anticorps correspondants, et l'apparition des hémolysines, des agglutinines et des substances rabicides dans le liquide céphalorachidien, nous avons poursuivi notre étude de l'immunité méningée vis-à-vis de la toxine diphtérique et de la toxine tétanique.

L'anatoxine diphtérique et l'anatoxine tétanique, préparées à l'Institut Pasteur, ont été employées pour la vaccination des animaux. On s'est toujours servi des anatoxines diluées au quart, à cause de l'intolérance que les lapins manifestent vis-à-vis des inoculations intrarachidiennes de l'anatoxine non diluée; cette intolérance nous paraît être due à l'action de la peptone, car le bouillon peptoné simple provoque les mêmes symptômes d'intoxication que l'anatoxine.

L'expérience a été conduite de la façon suivante :

Un lot de lapins recevait, par ponction occipitale, 2^{cm^3} d'anatoxine tétanique diluée au quart, et, par voie péritonéale, 2^{cm^3} d'une dilution au quart d'anatoxine diphtérique; un autre lot de lapins recevait, au contraire, l'anatoxine diphtérique dans la cavité méningée et l'anatoxine tétanique dans la cavité péritonéale. Ces inoculations furent répétées quatre fois, à 8 jours d'intervalle. Avant chaque réinoculation on prélevait des échantillons de sang et de liquide céphalo-rachidien; les sérums inactivés et les liquides étaient mélangés, à parties égales, avec 10 doses mortelles de toxine et éprouvés quant à leur pouvoir préventif, soit sur des cobayes pour la toxine diphtérique, soit sur des souris pour la toxine tétanique.

Ces expériences nous ont régulièrement fourni les résultats suivants :

1° Le pouvoir antitoxique des *sérums* apparaît aussi bien à la suite d'une vaccination péritonéale qu'à la suite d'une vaccination méningée; toutefois, le taux antitoxique des sérums se montre plus élevé dans le cas d'une vaccination méningée;

(¹) Séance du 26 décembre 1928.

2° Le pouvoir antitoxique des *liquides céphalo-rachidiens* est nul lorsque l'anatoxine est inoculée dans la cavité péritonéale; il se montre, au contraire, très élevé lorsque cette anatoxine est introduite directement dans la cavité méningée;

3° Le taux antitoxique des liquides céphalo-rachidiens ne baisse que lentement et graduellement et se manifeste encore le trentième jour après la dernière inoculation de l'anatoxine.

Conclusions. — 1° La barrière vasculo-méningée est imperméable aux antitoxines sanguines formées dans l'organisme animal à la suite des inoculations des anatoxines dans la cavité péritonéale.

2° L'apparition des antitoxines dans le liquide céphalo-rachidien des animaux vaccinés par la voie intra-méningée est due à leur production locale par des cellules dont la nature reste à déterminer.

MÉDECINE. — *Vérification spectrographique de l'activation de l'ergostérol sous l'influence de l'irradiation par les rayons ultraviolets.* Note [1] de M. **Georges Tixier**, présentée par M. d'Arsonval.

L'ergostérol irradié dans certaines conditions acquiert des propriétés antirachitiques. Il est très difficile de se rendre compte si la substance irradiée présente bien ces propriétés : Le test biologique semblait seul jusqu'ici pouvoir apporter cette confirmation.

Toutefois, dans la pratique courante, une telle épreuve présente de nombreux inconvénients, dont les principaux sont : la difficulté de se procurer de jeunes rats au sevrage, la mortalité élevée qui survient chez ces animaux lorsqu'ils sont soumis au régime rachitigène, enfin le délai de plusieurs semaines indispensable pour apprécier l'activité du produit. Dans le cas présent, ce délai est particulièrement regrettable puisqu'il empêche de livrer à la consommation le produit préparé, alors que ce produit perd chaque jour une partie de son efficacité.

Comme l'on sait d'autre part que l'ergostérol irradié possède un pouvoir de transmission augmenté dans la zone (2400 à 2950) unités Angström, nous avons pensé pouvoir utiliser ce caractère pour préciser l'activation de ce produit.

Nous avons donc été amenés à spectrographier en série des échantillons

---

(1) Séance du 2 janvier 1929.

soumis à des temps d'irradiation progressivement croissants ; en même temps l'action antirachitique était vérifiée par l'examen radiographique des rats, d'abord carencés, puis soumis au traitement par l'ergostérol irradié.

Nos essais ont paru d'abord confirmer les conclusions de Fabre et Simonet : la transformation spectrographique ne s'arrête pas au stade d'action biologique maxima de produit, la transparence continue à augmenter alors que le degré d'activité antirachitique ne s'accroît plus et même diminue.

Toutefois, assez rapidement (quelques minutes avec la source très intense que nous utilisons pour l'irradiation), l'ergostérol subit une transformation qui aboutit à la formation d'une résine ; l'absorption dans le spectre ultra-violet augmente alors de nouveau rapidement.

Si l'on considère les deux courbes, courbe de transmission dans l'U. V. et courbe d'activité antirachitique, en fonction des temps d'irradiation, on constate un parallélisme au début, puis un décalage net entre les deux courbes.

Nous avons pu, en vérifiant d'une part l'activité antirachitique par le test biologique et d'autre part en prenant de nombreux spectres, préciser la transmission optique correspondant au maximum d'activation biologique du produit considéré.

La solution à examiner est placée dans une cuve de quartz à épaisseur variable. L'épaisseur varie au moyen d'un pas de vis ayant 1 millimètre de pas. Un cercle gradué en 100 divisions permet de faire varier l'épaisseur à $\frac{1}{100}$ de millimètre avec une grande exactitude.

Pour donner plus de précision à la mesure, la solution considérée est assez diluée pour obtenir un bon étalement du phénomène.

La source employée était d'abord l'étincelle de H. F. entre électrodes de magnésium. Nous avons pour des raisons de plus grande constance, employé un arc à vapeur de mercure à refroidissement forcé avec volmètre de contrôle.

La raie 2537 du mercure se montre particulièrement favorable à cette épreuve. La source de lumière est donc absolument semblable à elle-même, la fente du spectrographe est toujours la même, le seul élément variable est l'épaisseur de la solution.

Le maximum d'activation antirachitique ne coïncide pas avec le minimum de transparence.

C'est ainsi qu'une solution d'ergostérine à 1 pour 100 dans le chloroforme est opaque pour la raie 2537 :

	Sous l'épaisseur de mm
Avant l'irradiation	0,16
A optimum d'activation	0,20
A maximum de transparence	0,23

Nous avons donc, en tenant compte de la dose nécessaire pour guérir le rat rachitique, repéré la transparence correspondante au maximum d'activation, transparence qui varie suivant la concentration de la solution.

Les autres raies présentent également des variations de transmissions, principalement les raies 2378, 2400, 2483, 2655, 2700, 2753, 2804, 2894 U. A.

Toutefois, celle où le phénomène est le plus étalé et se prête aux mesures les plus précises est la raie 2537 que nous prenons pour témoin du degré d'irradiation.

D'autre part, nous avons cherché à réaliser une irradiation véritablement uniforme des différentes venues. Nous y sommes parvenus grâce à un brûleur à vapeur de mercure à gaz très poussé et maintenu à régime constant par un dispositif spécial. Le voltage peut être vérifié à chaque instant, grâce à un volmètre placé aux bornes du brûleur.

Les produits sont irradiés à l'abri de l'oxygène atmosphérique, les différentes venues sont remarquablement semblables ainsi que le prouvent l'examen biologique et l'examen spectrographique réalisé suivant la méthode décrite ci-dessus.

Nous étudions d'autre part s'il n'est pas possible, par une méthode analogue, de contrôler l'efficacité des préparations anciennes.

La séance est levée à 16h30m.

A. Lx.